

**ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ
ДИНАМИКИ.
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА
ВТОРОГО РОДА**

**Рабочая тетрадь №4
по теоретической механике**

Студент _____

Группа _____

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ
ДИНАМИКИ.
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА
ВТОРОГО РОДА**

Рабочая тетрадь №4
по теоретической механике

Нижний Новгород 2009

УДК 531(075)

Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа второго рода:
Рабочая тетрадь №4 по теоретической механике / А. Ю. Панов,
Н. Ф. Ершов, Р.Л. Шиберт, Д.А. Смирнов;
Нижегород. гос. техн. ун-т. Н.Новгород, 2009. 16 с.

Учебно-методическая разработка предназначена студентам всех специальностей для выполнения расчетно-графических работ по динамике. Способствует развитию творческой инициативы и инженерной интуиции.

Редактор О.В. Пугина

Подп. Формат 60x84 1/8. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 1,0.
Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 200 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603950, Н. Новгород, ул. Минина, 24.

© А.Ю. Панов, Н.Ф. Ершов, Р.Л. Шиберт, Д.А. Смирнов.

© Нижегородский государственный технический университет, 2009

Общее уравнение динамики

Для исследования движения механической системы можно воспользоваться общим уравнением динамики

$$\delta A + \delta A_u = 0.$$

Согласно общему уравнению динамики, при движении механической системы с идеальными и удерживающими связями виртуальная работа заданных сил и сил инерции равна нулю. Для отдельных твердых тел системы, силы инерции следует привести к главному вектору и главному моменту. В динамике за центр приведения обычно принимается центр масс. При этом, в зависимости от вида движения отдельного тела системы, получаются различные частные случаи приведения.

Метод кинетостатики

Для определения реакций связей систем, которые совершают движение, можно воспользоваться уравнениями метода кинетостатики

$$\begin{aligned}\overline{F} + \overline{R} + \overline{F}_u &= 0, \\ \overline{M}_o + \overline{M}_o^R + \overline{M}_o^u &= 0.\end{aligned}$$

Согласно этому методу, при движении механической системы в каждый момент времени суммы главных векторов и главных моментов заданных сил, реакций связей и сил инерции равны нулю.

Для решения задач эти уравнения следует записать в проекциях на оси декартовых координат. Оси координат могут быть как неподвижными, так и подвижными. При этом, в зависимости от выбранных осей следует учитывать соответствующие силы инерции.

Этот метод часто применяется для решения различных инженерных задач.

Уравнения Лагранжа второго рода

Для исследования движения механической системы с голономными, идеальными и удерживающими связями можно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, s}.$$

Уравнения Лагранжа представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_s . Число этих уравнений, равно числу степеней свободы системы. Если заданы действующие силы и начальные условия, то можно найти закон движения системы в обобщенных координатах. При необходимости затем можно найти обобщенные скорости и ускорения.

В силу универсальности уравнений Лагранжа с их помощью можно решать практические задачи механики, автомобиле- и судостроения, а также другие инженерные задачи.

Перечень тем и вопросов, знание которых необходимо для выполнения расчетно-графической работы

К заданию №4

Тема. Общее уравнение динамики.

Вопросы

- 1. Общее уравнение динамики.*
- 2. Виртуальные перемещения.*
- 3. Виртуальная работа заданных сил.*
- 4. Виртуальная работа сил инерции.*
- 5. Главный вектор и главный момент сил инерции при поступательном, вращательном и плоском движении твердого тела.*

К заданию №5

Тема. Метод кинетостатики.

Вопросы

- 1. Метод кинетостатики.*
- 2. Уравнения метода кинетостатики.*
- 3. Силы инерции.*
- 4. Статические составляющие реакций.*
- 5. Динамические составляющие реакций.*

К заданию №6

Тема. Уравнения Лагранжа второго рода.

Вопросы

- 1. Уравнения Лагранжа второго рода.*
- 2. Обобщенные координаты.*
- 3. Обобщенные скорости.*
- 4. Кинетическая энергия системы.*
- 5. Обобщенные силы.*

Исходные данные *

Цифра шифра		А, Б	В,Г,Д	Е, Ж, З	И, К	Л, М	Н, О	П, Р	С, Т	У,Ф, Х,Ц, Ч	Ш,Щ,Ъ, Ы,Ь,Э, Ю,Я
1-я	Рис.1	1	10	2	9	3	8	4	7	5	6
	α , град	30	60	45	30	45	60	45	-	-	-
2-я	m_1 , кг	10	19	11	18	12	17	13	16	14	15
3-я	R_2/r_2	1,15	1,1	1,45	1,4	1,35	1,3	1,25	1,2	1,15	1,1
4-я	R_2 , м	0,24	0,26	0,22	0,28	0,20	0,24	0,26	0,22	0,28	0,20
5-я	f	0,20	0,20	0,20	0,1	0,1	0,1	0,15	0,15	0,15	0,15
	f_k/r	0,03	0,03	0,03	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02

Здесь m_1 - масса тела 1; R_2 / r_2 - отношение радиусов составного блока 2; α -угол наклона опорной поверхности (рис.1); f - коэффициент трения скольжения; f_k - коэффициент трения качения; f_k/r - отношение коэффициента трения качения к радиусу опорной поверхности колеса, которое катится без скольжения по поверхности.

Дополнение к исходным данным

- Массы тел составного блока пропорциональны квадратам их радиусов.
- Неизвестные массы тел выбрать из условия, что их суммарная масса не будет превышать массы 1-го тела.
- Неизвестные радиусы колес выбрать, ориентируясь на рис. 1.

* Исходные данные определяются по пятизначному шифру.

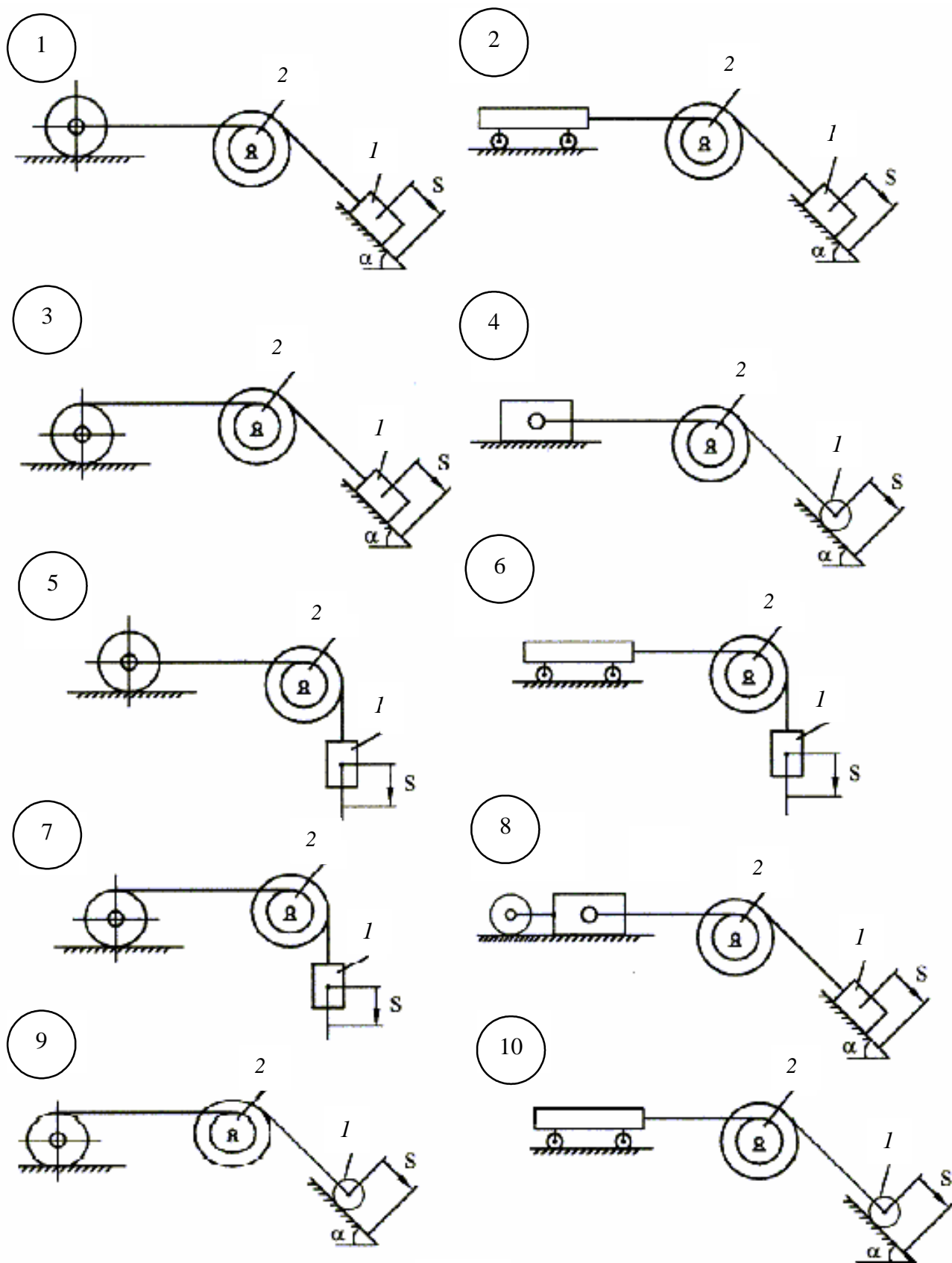


Рис. 1

Задание №4. Определить ускорения тел механической системы

1. Выбираем механическую систему в соответствии с вариантом (рис.1).

Указание. Систему показать на рисунке.

2. Задаем виртуальное перемещение механической системы.

Указание. За независимое принять виртуальное перемещение тела 1. Виртуальные перемещения остальных тел выразить через независимое.

3. Показываем ускорения всех тел системы.

Указание. Для поступательного движения тела – ускорение поступательного движения a , для вращательного движения – угловое ускорение ε , для плоского движения – ускорение центра масс a_c и угловое ускорение ε .

4. Показываем заданные силы, действующие на систему.

Указание. Показать силы тяжести, силы трения скольжения, моменты сопротивления качению.

5. Показываем силы инерции.

Указание. Для поступательного движения тела – главный вектор сил инерции, для вращательного (вокруг главной центральной оси) – главный момент сил инерции, для плоского – главный вектор и главный момент сил инерции.

6. Записываем общее уравнение динамики.

Указание. Учитывается виртуальная работа заданных сил и пар сил, а также виртуальная работа сил инерции и пар сил инерции.

7. Определяем ускорения тел системы.

Указание. Найти ускорение тела 1 из решения уравнения п.6. Ускорения остальных тел найти из кинематических соотношений.

Задание №4. Решение

Задание №4. Решение (продолжение)

Задание №5. Найти реакции опоры блока.

1. Выбираем механическую систему в соответствии с вариантом (рис.1).

Указание. Систему показать на рисунке.

2. Составляем расчетную схему.

Указание. Сделать разрезы в ветвях нитей. Показать заданные силы, реакции опор и нитей, силы и моменты сил инерции.

3. Составляем уравнения метода кинетостатики.

Указание. Уравнение записать в проекциях на оси декартовой системы координат.

4. Решаем уравнения метода кинетостатики.

Указание. Определяем реакции опор и нитей.

5. Определяем статические и динамические составляющие реакций неподвижного блока.

Указание. Найти горизонтальную и вертикальную составляющие реакции опоры блока. Выделить статические и динамические составляющие реакции.

Задание №5. Решение

Задание №5. Решение (продолжение)

Задание №6. Определить закон движения механической системы в обобщенных координатах.

1. Выбираем механическую систему в соответствии с вариантом (рис.1).

Указание. Систему показать на рисунке.

2. Выбираем обобщенную координату.

Указание. За обобщенную координату принять линейное перемещение тела 1.

3. Определяем кинетическую энергию системы.

Указание. Кинетическую энергию найти как сумму кинетических энергий тел системы. Выразить кинетическую энергию как функцию обобщенной скорости.

4. Показать силы, действующие на систему.

Указание. Показать силы тяжести, силы трения скольжения, моменты сопротивления качению.

5. Записываем уравнение Лагранжа второго рода.

Указание. Учесть, что кинетическая энергия системы (рис.1) не зависит от конфигурации системы. Найти обобщенную силу. Записать дифференциальное уравнение движения в обобщенных координатах.

6. Определяем закон движения системы в обобщенных координатах.

Указание. Интегрируем дифференциальное уравнение п.5 и находим зависимость обобщенной координаты от времени.

7. Проводим расчет зависимости обобщенной координаты, скорости и ускорения от времени.

Указание. Принять, что в начальный момент времени $t=0$ система находилась в покое.

8. Строим зависимость обобщенной координаты, скорости и ускорения от времени.

Указание. Шкалы графика строить с использованием рекомендуемых значений масштаба равномерных шкал осей.

Задание №6. Решение

*Задание №6. Решение (продолжение)**

*Допускается оформление контрольных домашних заданий на листах формата А4 в соответствии с требованиями СТП-І-У-НГТУ-2004.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

К заданию №4

Общее уравнение динамики

$$\delta A + \delta A_u = 0.$$

Виртуальная работа:

- сил $\delta A = \bar{F} \cdot \delta \bar{r}$;
- пар сил $\delta A = \bar{M} \cdot \delta \bar{\varphi}$;
- сил инерции $\delta A_u = \bar{F}_u \cdot \delta \bar{r}$;
- пар сил инерции $\delta A_u = \bar{M}_u \cdot \delta \bar{\varphi}$.

К заданию №5

Уравнения метода кинетостатики

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0,$$

где \bar{F}_k – заданные силы, реакции связей и силы инерции.

К заданию №6

Уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где T – кинетическая энергия системы; $Q = \frac{\delta A}{\delta q}$ – обобщенная сила.