Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

Е.Н. Сафьянова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебное пособие

2000

Сафьянова Е.Н.
Дискретная математика. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2000. – 106 с.

Учебное пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром кафедры автоматизированных систем управления ТУСУР 17 мая 1999 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для создания и эксплуатации сложных автоматизированных систем обработки информации и их компонент в области экономики, математи-ческого и программного обеспечения вычислительной техники, сетей передачи данных и многих других сферах деятельности человека необходимо знание дискретной математики.

Дискретная математика – часть математики, которая зародилась в глубокой древности. Как говорит само название, главной ее особенностью является дискретность, т.е. антипод непрерывности. В ней отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Дискретная математика занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях.

Цель дисциплины «Дискретная математика» – знакомство с основными разделами зтой науки: теорией множеств, математической логикой, теорией графов, теорией алгоритмов, комбинаторным анализом как аппаратом для построения моделей дискретных систем.

Дискретная математика является обязательной дисциплиной цикла «Математические и общие естественнонаучные дисциплины». Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных» и т.д.

Настоящее пособие представляет собой курс лекций, читаемый в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники студентам специальностей «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» и «Информационные системы в экономике».

Пособие рассчитано на изучение в течение двух семестров и в соответствии с этим разбито на две части.

В первой части излагаются основы теории множеств, теории графов, элементы алгебры высказываний, теории булевых функций и логики предикатов.

Вторая часть посвящена изложению основ построения формальных теорий, знакомству с основными разделами теории алгоритмов: аппаратом рекурсивных функций, машинами Тьюринга, нормальными алгоритмами Маркова. Завершает вторую часть раздел, дающий представление о задачах и основных построениях комбинаторного анализа.

В конце каждого раздела приведены задачи и упражнения, которые необходимо выполнить для закрепления теоретического материала.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1 Основные определения

Понятие **множества** является фундаментальным неопределяемым понятием. Интуитивно под множеством понимают совокупность вполне определенных различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Природа объектов может быть самой различной. Так, можно говорить о множестве стульев в комнате, людей, живущих в Томске, студентов в группе, о множестве натуральных чисел, букв в алфавите, состояний системы и т.п. Но нельзя, например, говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю, капли неразличимы между собой.

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называют его **элементами**.

Для обозначения конкретных множеств принято использовать прописные буквы A, S, X, ... Для обозначения элементов множества используют строчные буквы a, s, x, ... Множество X, элементами которого являются x_1, x_2, x_3 , обозначают $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Это один способ задания множества – перечисление всех его элементов. Он удобен при рассмотрении конечных множеств, содержащих небольшое число элементов. Второй способ задания множества – описательный – состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все элементы множества. Так, если M – множество студентов группы, то множество X отличников этой группы записывается в виде

$$X = \{x \in M \,/\, x \text{ - отличник группы}\},$$

что читается следующим образом: множество X состоит из элементов x множества M таких, что x является отличником группы. Множество простых чисел записывается как $X = \{x \,/\, x \text{ - простое}\}$. Для указания того, что элемент x принадлежит множеству X, используется запись $x \in X$. Запись $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество называется **конечным**, если оно содержит конечное число элементов, и **бесконечным**, если число его элементов бесконечно. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым**. Пустое множество обозначается $\varnothing$, например:

$$X = \{x \in C \,/\, x^2 - x + 1 = 0\} = \varnothing,$$

где C - множество целых чисел. Пустое множество условно относится к конечным множествам.

Два множества X и Y **равны** в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $X = Y$, если $x \in X$, то $x \in Y$ и если $y \in Y$, то $y \in X$.

Множество X является **подмножеством** множества Y, если любой элемент множества X принадлежит множеству Y. Этот факт записывается как $X \subset Y$.

Последовательность из n элементов множества называется **n-строчкой** или **кортежем**. В n-строчке каждый элемент занимает определенное место, тогда как во множестве порядок расположения элементов роли не играет.

Для сокращения записи в теории множеств используются некоторые логические символы. Это кванторы общности $\forall$ и существования $\exists$, а также символы следствия (импликации) $\Rightarrow$ и логической эквивалентности $\Leftrightarrow$. Смысл этих обозначений следующий:

$\forall$ - «любой», «каждый», «для всех»;

$\exists$ - «существует», «найдется», «хотя бы один»;

$\Rightarrow$ - «влечет», «имеет следствием»;

$\Leftrightarrow$ - «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно».

Использование логических символов, например, для определения подмножества, которое может быть сформулировано в виде: для любого x утверждение «x принадлежит X» влечет за собой утверждение «x принадлежит Y», приводит к записи:

$$\forall x\, [x \in X \Rightarrow x \in Y].$$

Запись $X \subset Y$ и $Y \subset X \Leftrightarrow X = Y$ означает: для того, чтобы X было равно Y необходимо и достаточно, чтобы $X \subset Y$ и $Y \subset X$.

1.2 Операции над множествами

Над множествами можно производить действия, которые во многом напоминают действия сложения и умножения в элементарной алгебре. Для графической иллюстрации операций над множествами будем использовать так называемые диаграммы Эйлера, в которых произвольному множеству X ставится в соответствие множество точек на плоскости внутри некоторой замкнутой кривой.

Объединением (суммой) множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X, Y (рис.1.1).

Объединение двух множеств символически записывают как $X \cup Y$ или $Y \cup X$. Объединение множеств X_i ($i = 1, 2, \ldots N$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств X_i. Соответствующее обозначение: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$.

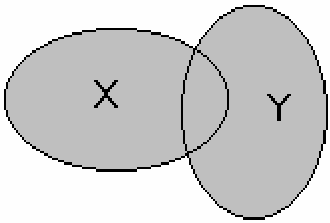


Рис. 1.1 – Объединение множеств

Пересечением множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству X, так и множеству Y (рис.1.2).

Пересечение множеств обозначается через $X \cap Y$. Множества X и Y называют **непересекающимися**, если они не имеют общих элементов, т.е. если $X \cap Y = \varnothing$.

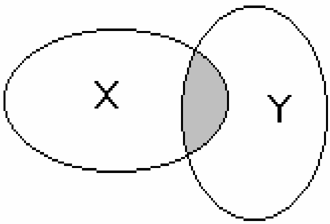


Рис. 1.2 – Пересечение множеств

Пересечением множеств X_i (i = 1, 2, ... N) называется множество элементов, принадлежащих всем X_i. Оно обозначается как $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$.

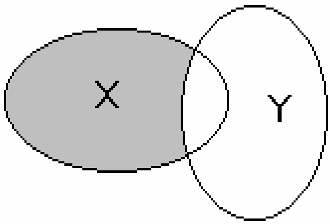


Рис. 1.3 – Разность множеств

Разностью множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат Y (рис.1.3). Разность множеств обозначается через X \ Y.

Пример 1. Пусть X – множество отличников в группе, Y – множество студентов, проживающих в общежитии. Тогда $X \cup Y$ – множество студентов, которые или учатся на «отлично», или проживают в общежитии, $X \cap Y$ – множество отличников, проживающих в общежитии, X \ Y – множество отличников, живущих вне общежития.

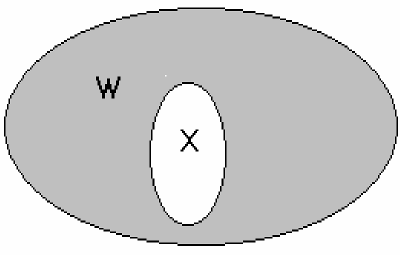


Рис. 1.4 – Дополнительное множество

Дополнительным к множеству X по отношению к множеству W, если $X \subset W$, называется множество, состоящее из элементов W, не принадлежащих множеству X. Символически дополнительное множество обозначается как $Z_W(X)$ (рис.1.4).

Универсальным множеством называется множество I, для которого справедливо соотношение: $X \cap I = X$, означающее, что множество I содержит все элементы множества X, так что любое множество X полностью содержится во множестве I. Так, для примера 1 универсальным множеством можно считать множество студентов в группе.

Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Отдельные области внутри этого прямоугольника будут представлять различные подмножества универсального множества.

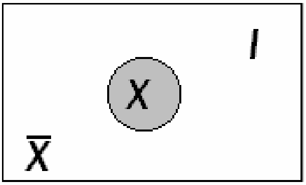


Рис. 1.5 – Универсальное множество и его дополнение

Множество $\overline{X}$, определяемое из соотношения $\overline{X} = I \setminus X$, называют **дополнением** множества X (до универсального множества I). На рис 1.5. множество $\overline{X}$ представляет собой не заштрихованную область.

Очевидно выполнение соотношений $X \cap \overline{X} = \varnothing$, $X \cup \overline{X} = I$, из которых следует, что не только $\overline{X}$ является дополнением X, но и X, в свою очередь, есть дополнение $\overline{X}$. Но дополнение $\overline{X}$ есть X. Таким образом, $\overline{\overline{X}} = X$.

С помощью операции дополнения можно в удобном виде представить разность множеств. $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

Множество упорядоченных пар (x, y), образованных элементами множеств X и Y, называется **декартовым**, или **прямым**, **произведением** множеств X и Y и обозначается $X \times Y$. Таким образом, элементами декартова произведения являются двухэлементные строчки вида (x, y).

Геометрической иллюстрацией декартова произведения может служить рис.1.6, на котором множества X и Y изображены отрезками вещественной оси, а произведение $X \times Y$ – заштрихованным прямоугольником. Из рис.1.6 следует, что декартово произведение не обладает переместительным свойством

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

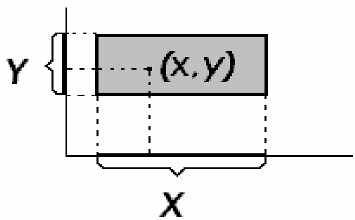


Рис. 1.6 – Декартово произведение множеств

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Тогда декартово произведение $X \times Y$ можно представить табл.1.1.

Таблица 1.1 – Пример декартова произведения

Y / X	y_1	y_2	Y_3
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)
x_3	(x_3, y_1)	(x_3, y_2)	(x_3, y_3)
x_4	(x_4, y_1)	(x_4, y_2)	(x_4, y_3)

Декартовым произведением множеств X_1, X_2, ... X_n называют множество, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и состоящее из всех тех и только тех n-строчек, первая компонента которых принадлежит X_1, вторая – X_2 и т.д.

Разбиением множества X называется такое множество множеств $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $X_i \subset X$, $i = 1, \ldots, n$;
2) $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
3) $X_i \cap X_j = \varnothing$, при $i \neq j$;
4) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$.

Так, например, курсы данного факультета являются разбиением множества студентов факультета, а группы данного курса – разбиением множества студентов курса.

Нетрудно показать, что введенные операции над множествами обладают следующими свойствами:

а) $X \cap Y = Y \cap X$,
$X \cup Y = Y \cup X$; (коммутативность)

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$,
$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$; (ассоциативность)

в) $X \cap X = X$,
$X \cup X = X$; (идемпотентность)

г) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. (дистрибутивность)

1.3 Отношения на множествах

Для приложения теории множеств к решению практических задач часто приходится рассматривать множества, между элементами которых определены те или иные отношения. Так, например, во множестве офицеров данного полка для некоторых пар элементов (a, b) справедливо утверждение «Офицер a служит в одной роте с офицером b», для других пар справедливо утверждение «Офицер a старше по званию офицера b», для третьих - утверждение «Офицер a имеет то же звание, что и офицер b». Каждое из этих утверждений задает некоторое отношение между офицерами a и b (совместной службы, старшинства, равенства званий). Примерами отношений могут служить неполные предложения – предикаты:

... меньше, чем ..., ... делится на ...,

... включено в ..., ... конгруэнтно ... .

В приведенных примерах речь шла об отношениях между элементами одного и того же множества. Можно говорить и об отношениях (точнее, соответствиях) между элементами различных множеств - например, утверждение «Офицер a служит в роте b» задает соответствие между множеством офицеров и множеством рот.

Для определения понятия соответствия используем представление о множестве упорядоченных пар элементов, троек, n-строчек, т.е. кортежей.

Бинарным соответствием (отношением) называется всякое подмножество множества $X \times Y$. В этом случае говорят, что между множествами X и Y установлено бинарное соответствие. Этот факт символически записывается в виде:

$$x\,R\,y\,,\ x \in X\,,\ y \in Y,$$

где R - символ отношения, указывающий конкретное подмножество множества $X \times Y$.

Тернарным соответствием (отношением) называется подмножество множества упорядоченных троек, являющихся элементами декартова произведения $X \times Y \times Z$.

n - арное соответствие (отношение) определяется как подмножество множества n-строчек, являющихся элементами декартова произведения

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Отметим, что в теории графов в основном рассматриваются бинарные соответствия, поэтому ограничимся рассмотрением соответствий только этого типа.

Если множества X и Y в бинарном соответствии совпадают, то говорят об **отношении между элементами множества** X. Рассмотрим основные свойства отношений.

1. Отношение R на множестве X называется **рефлексивным**, если для любого элемента $x \in X$ справедливо $x R x$ или, иначе, $(x, x) \in R$.
2. Если условие рефлексивности не выполняется ни для одного элемента $x \in X$, то отношение R называется **антирефлексивным**.
3. Отношение R между элементами множества X называется **симметрическим**, если для любых элементов $x, y \in X$ справедливо соотношение

$$x R y \Rightarrow y R x \text{ или } (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R.$$

4. Отношение R между элементами множества X называется **антисимметрическим**, если для любых элементов $x, y \in X$ справедливо утверждение $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$. Антисимметрическое отношение является одновременно и антирефлексивным.
5. Отношение R между элементами множества X называется **тождественным**, если для любых элементов $x, y \in X$ справедливо утверждение: $x R y$ и $y R x \Rightarrow x = y$ или $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$. Антисимметрическое отношение является пересечением тождественного и антирефлексивного отношений.
6. Отношение R между элементами множества X называется **транзитивным**, если для любых элементов $x, y, z \in X$ справедливо

$$x R y,\ y R z \Rightarrow x R z \text{ или } (x, y) \in R \text{ и } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$$

Примерами транзитивных отношений являются отношения параллельности, равенства, «больше». Отношения перпендикулярности, неравенства представляют собой нетранзитивные отношения.

7. Отношение R между элементами множества X обладает свойством **полноты**, если для любой пары (x, y) элементов из X всегда выполняется одно из двух соотношений: $x R y$ или $y R x$.

Для каждого отношения R можно определить **обратное отношение** R^{-1}. Краткая запись этого определения выглядит следующим образом:

$$\forall R \ \exists R^{-1},\ y R^{-1} x \Leftrightarrow x R y.$$

Например, для отношения «x является делителем y» обратным является «y кратно x», для отношения «x больше y» обратно «y меньше x».

Нулевым называется отношение, которое не выполняется ни для одной пары элементов множества. **Универсальным** называется отношение, которое выполняется для любой пары элементов множества.

Дополнительным к R отношением $\overline{R}$ называется такое отношение, что $(x_1, x_2) \in \overline{R} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \notin R$.

Рассмотрим теперь основные виды отношений.

1. Отношение $R \subset X \times X$ между элементами множества X, обладающее свойствами рефлексивности ($x\ R\ x\ \forall\ x \in X$), симметричности ($x_1\ R\ x_2 \Rightarrow x_2\ R\ x_1\ \forall\ x_1, x_2 \in X$) и транзитивности ($x_1\ R\ x_2$ и $x_2\ R\ x_3 \Rightarrow x_1\ R\ x_3\ \forall\ x_1, x_2, x_3 \in X$), называется **отношением эквивалентности** и обозначается $x_1 \sim x_2$. Примерами отношения эквивалентности являются равенство векторов в евклидовом пространстве, равенство фигур в евклидовой геометрии. Любое отношение эквивалентности, заданное на множестве, разбивает это множество на непересекающиеся подмножества. Так, например, отношение «проживание в одном городе» на множестве жителей страны разбивает это множество на непересекающиеся подмножества, количество которых равно числу городов в стране. Эти подмножества называются классами эквивалентности. Справедливо и обратное утверждение: каждое разбиение множества на непересекающиеся подмножества определяет некоторое отношение эквивалентности.

2. **Отношением квазипорядка** на множестве X называется отношение $R \subset X \times X$, обладающее свойствами рефлексивности и транзитивности. Например, отношение «$x_1 \geq x_2$» на множестве вещественных чисел есть отношение квазипорядка. Поэтому данное отношение часто обозначается символом $\geq$.

3. Отношение квазипорядка, обладающее также свойством тождественности, называется **отношением порядка**. Оно должно, таким образом, удовлетворять аксиомам отношения «$x \geq x$»: $x_1 \geq x_2$ и $x_2 \geq x_3 \Rightarrow x_1 \geq x_3$, $x_1 \geq x_2$ и $x_2 \geq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

4. Отношение, обладающее свойствами транзитивности и антисимметричности, называется **отношением строгого порядка.** Это отношение часто обозначают символом >. Оно должно удовле-

творять следующим аксиомам: $x_1 > x_2$ и $x_2 > x_3 \Rightarrow x_1 > x_3$, $x_1 > x_2 \Rightarrow x_2 > x_1$ – невозможно.

5. **Отношением полного порядка** называется отношение порядка, обладающее дополнительно еще и свойством полноты. Оно удовлетворяет аксиомам: $x \geq x$; $x_1 \geq x_2$ и $x_2 \geq x_3 \Rightarrow x_1 \geq x_3$; $x_1 \geq x_2$ и $x_2 \geq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$; $\forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow x_1 \geq x_2$ или $x_2 \geq x_1$.

6. **Нерефлексивным отношением полного порядка** называется отношение полного порядка, не удовлетворяющее требованию рефлексивности ни на одном из элементов множества. Оно обладает, следовательно, свойствами транзитивности, антисимметричности и полноты.

Наглядное представление о перечисленных типах отношений и их свойствах дает табл. 1.2.

Таблица 1.2. – Виды отношений и их свойства

	Отношения					
Свойства	Эквивалентность	Квазипорядок	Порядок	Строгий порядок	Полный порядок	Нерефлексивный полный порядок
1.Рефлексивность	*	*	*		*	
2.Антирефлексивность				*		*
3.Симметричность	*					
4.Антисимметричность				*		*
5.Тождественность			*		*	
6.Транзитивность	*	*	*	*	*	*
7.Полнота					*	*

Кроме того, все рассмотренные отношения и их свойства хорошо иллюстрируются на графах, что мы и покажем несколько позднее.

1.4 Экстремальные элементы множеств

В соответствии с отношением порядка говорят, что при $x_1 \leq x_2$ элемент x_1 предшествует элементу x_2 или x_2 следует за x_1.

Пусть имеется подмножество $X' \subset X$, где X упорядоченное множество, т.е. множество, для элементов которого определено отношение порядка. Тогда **мажорантой** множества X′ называется элемент $x_{max} \in X$, следующий за всеми элементами множества X′, $x_{max} \geq x$ $(x_{max} \in X)$. При этом мажоранта может и не принадлежать множеству X′. Если же $x_{max} \in X'$, то x_{max} называется **наибольшим элементом**, или **максимумом** множества X′.

Минорантой множества X′ называется элемент $x_{min} \in X$, предшествующий всем элементам множества X′. Если элемент $x_{min} \in X'$, то он называется **наименьшим элементом,** или **минимумом** множества X′.

1.5 Отображения множеств

Пусть X и Y - два непустых множества. Закон G, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y \in Y$, называется **однозначным отображением** X в Y, или функцией, определенной на X и принимающей значения на Y.

Используются следующие формы записи:

$$G: X \to Y \text{ или } y = G(x), \ x \in X, y \in Y.$$

В случае однозначного отображения элемент $y = G(x)$ называется образом элемента x.

Возможна ситуация, когда каждому $x \in X$ отображение G ставит в соответствие некоторое подмножество $G(x) \subset Y$. Тогда образом элемента x будет подмножество G(x), а отображение G, будет называться **многозначным отображением.** Отображение является, таким образом, всюду определенным соответствием, т.е. частным случаем соответствия и определяется тройкой множеств (X, Y, G).

Интересным является случай, когда множества X и Y совпадают. При этом отображение $G: X \to X$ представляет собой отображение множества X самого в себя и определяется парой (X, G), где $G \subset X \times X$. Подробным изучением таких отображений занимается теория графов. Коснемся лишь нескольких операций над ними.

Пусть G и H – отображения множества X в X. Композицией этих отображений назовем отображение GH, которое определяется следующим образом: $GH(x) = G(H(x))$.

В частном случае при H = G получим отображения $G^2(x) = G(G(x))$, $G^3(x) = G(G^2(x))$ и т.д.

Для произвольного $S \geq 2$: $G^S(x) = G(G^{S-1}(x))$.

Введем для общности рассуждений соотношение $G^0(x) = x$. Тогда можно записать: $G^0(x) = G(G^{-1}(x)) = GG^{-1}(x) = x$.

Это означает, что $G^{-1}(x)$ представляет собой обратное отображение. Тогда $G^{-2}(x) = G^{-1}(G^{-1}(x))$ и т.д.

Пусть, например, X - множество людей. Для каждого человека $x \in X$ обозначим через G(x) множество его детей. Тогда $G^2(x)$ - множество внуков x, $G^3(x)$ - множество правнуков x, $G^{-1}(x)$ - множество родителей x и т.д. Изображая людей точками и рисуя стрелки, идущие из x в G(x), получим родословное, или генеалогическое дерево (рис. 1.7.)

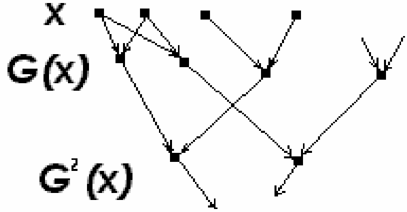


Рис. 1.7 – Генеалогическое дерево

1.6 Задачи и упражнения

1. Даны множества X = {1, 2, 3, 4, 5}, Y = {2, 4, 6, 7}, найдите $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.
2. Пусть X – множество отличников в группе, Y – множество студентов группы, проживающих в общежитии. Найдите множества: $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.
3. Что представляет собой пересечение множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов?
4. Пусть $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ – универсальное множество, а $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{x_2, x_3\}$, $Z = \{x_3\}$ – его подмножества. Определите перечис-

лением множества: $X \times X$, $Z \times Z$, $X \times Y$, $Y \times X$, $X \times Y \cap Y \times X$, $X \times Y \cup Y \times X$.

5. Проиллюстрируйте графически тождества
 $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
 $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
6. Пусть R – множество вещественных чисел, $X = \{x \in R \,/\, 0 \le x \le 1\}$, $Y = \{y \in R \,/\, 0 \le y \le 2\}$. Что представляют собой множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$?
7. Начертите фигуры, изображающие множества $A = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$, где R^2 – вещественная плоскость. Какие фигуры изображают множества $A \cup B$, $A \cap B$, $R^2 \setminus A$?
8. Пусть X, Y, Z – подмножества множества R^2, равные: $X = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x \ge 0\}$, $Y = \{(x, y) \in R^2 \,/\, y \ge 0\}$, $Z = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x + y \ge 1\}$. Представьте геометрически множества X, Y, Z, $X \bigcup Y$, $\overline{X \bigcup Y}$, $X \bigcap Y$, $\overline{X \bigcap Y}$, $X \bigcap Z$, $\overline{X \bigcap Z}$, $X \bigcap Y \bigcap Z$, $\overline{X \bigcap Y \bigcap Z}$.
9. Пусть $X = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3, 0\}$ и Y – множество всех натуральных чисел. Каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие его квадрат. Выпишите все пары, принадлежащие этому соответствию.
10. Пусть X = {«атом», «стол», «море», «мера»}, Y = {а, м, о, р, е}. Составьте декартово произведение $X \times Y$. Отметьте в нем пары, связанные соответствием «в слово x входит буква y».
11. Пусть V – множество положительных целых чисел от 1 до 20, на котором задано отношение R: «число x делится на число y», причем $x \in V$, $y \in V$. Выпишите все пары из V, находящиеся в отношении R.
12. Дано множество B = {1, 3, 5, 7, 9}. Элементы этого множества связаны отношением S: «число x на 2 больше числа y». Запишите множество пар, принадлежащих этому отношению.
13. Определите свойства следующих отношений:
    а) «прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых);
    б) «число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел);

в) «число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел);

г) «x – сестра y» (на множестве людей).

14. На множестве $X = \{x \mid x \in N, x < 12\}$ задано отношение R: «x и y имеют один и тот же остаток при делении на 5» ($x \in X$, $y \in X$). Покажите, что R – отношение эквивалентности. Запишите все классы эквивалентности, на которые разбивается множество данным отношением.
15. Рассмотрите на множестве людей следующие отношения, укажите среди них отношения эквивалентности:

а) «x похож на y»;

б) «x и y живут в одном доме»;

в) «x и y – друзья»;

г) «x живет этажом выше, чем y».

16. Отношение S на множестве $X = \{1, 2, 3\}$ состоит из пар: (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 3). Является ли S отношением эквивалентности на множестве X?
17. Какие из нижеперечисленных отношений являются отношениями квазипорядка, порядка, строгого порядка?

а) «отрезок x длиннее отрезка y»;

б) «отрезок x короче отрезка y в 2 раза» – на множестве отрезков;

в) «x старше по возрасту, чем y»;

г) «x является сестрой y»;

д) «x живет в одном доме с y»;

е) «x – друг y» – на множестве людей;

ж) «число x не меньше числа y» – на множестве R;

з) «окружность x лежит внутри окружности y» – на множестве окружностей плоскости.

18. Докажите тождества: $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где A, B, C - заданные множества и $B \subset A \subset C$.

20. Докажите, что $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.
21. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны и отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$.

22. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 симметричны, то симметричны и отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$.
23. Докажите, что два множества равны тогда и только тогда, когда результаты их пересечения и объединения совпадают.
24. Известно, что из 100 студентов живописью увлекается 28, спортом – 42, музыкой – 30, живописью и спортом – 10, живописью и музыкой – 8, спортом и музыкой – 5, живописью, спортом и музыкой – 3. Определите количество студентов:
    а) увлекающихся только спортом;
    б) ничем не увлекающихся.

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

На практике часто бывает полезно изобразить некоторую ситуацию в виде рисунков, составленных из точек (вершин), представляющих основные ситуации, и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними. Таким способом удобно представлять структуру системы (вершины – блоки, ребра – связи между блоками). Удобны графы при исследовании систем методом пространства состояний. В этом случае вершины – состояния системы, процесса, ребра – действия, которые могут изменить состояние. При решении оптимизационных задач вершинами могут быть предполагаемые решения, ребрами – правила для их нахождения.

Такие рисунки известны под общим названием графов. Графы встречаются в разных областях под разными названиями: “структуры” в гражд-анском строительстве, “сети” в электротехнике, “социограммы” в социологии и экономике, “молекулярные структуры” в химии, и т. д.

Начало теории графов как математической дисциплины было положено Эйлером в знаменитом рассуждении о Кенигсбергских мостах. Однако эта статья, написанная в1736 г, была единственной в течение почти ста лет. Интерес к этой науке возродился около середины XIX в. в связи с развитием естественных наук (исследования электрических сетей, моделей кристаллов и структур молекул), формальной логики (бинарные отношения можно изучать в форме графов). Кроме того, оказалось, что многие математические головоломки могут быть сформулированы в терминах теории графов. Это приводило к пониманию того, что многие задачи такого рода содержат некоторое математическое ядро, важность которого выходит за рамки конкретного вопроса. Наиболее знаменитая из них – проблема четырех красок (сформулирована Де Морганом в 1850г.).

Последние 35 – 40 лет ознаменовали новый период интенсивных разработок в теории графов. Появились новые области приложения: теория игр и программирование, теория передачи сообщения, электрических сетей и контактных цепей, биология, психология.

2.1 Основные определения

2.1.1 Общие понятия

Граф G задается множеством точек (**вершин**) $X=\{x_1,..x_n\}$ и множеством линий (**ребер**) $A=\{a_1,..,a_m\}$, соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф G полностью задается парой (X,A).

Другое, чаще употребляемое описание графа, состоит в задании множества вершин X и соответствия G, которое показывает, как между собой связаны вершины. То есть граф задается следующим образом.

Пусть дано множество X, состоящее из элементов (назовем их **вершинами графа**) и закон G, позволяющий установить соответствие между каждым элементом x множества X и некоторыми его подмножествами G(x) тогда граф полностью определяется множеством X и соответствием G, то есть граф обозначается парой (X,G). Удобно использовать обозначение G(X) по аналогии с функцией.

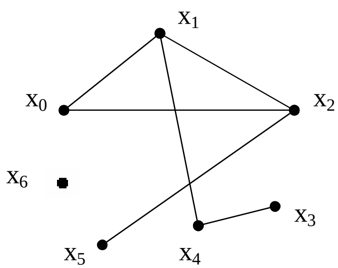


Рис. 2.1 – Пример задания графа

Пример (рис.2.1). Множество вершин $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и соответствия между вершинами

$G(x_0) = \{x_1, x_2\}$,
$G(x_2) = \{x_0, x_1, x_5\}$,
$G(x_3) = \{x_4\}$,
$G(x_4) = \{x_1, x_3\}$,
$G(x_5) = \{x_2\}$,
$G(x_6) = \varnothing$.

Ребра графа – линии, соединяющие вершины, указывают на соответствие между вершинами в графе.

Запись $g(x_i, x_j)$ говорит, что ребро g **инцидентно** вершинам x_i, x_j и вершины x_i, x_j **инцидентны** ребру g. Две вершины x_i, x_j называются **смежными**, если они определяют ребро графа. Два ребра графа называются **смежными,** если их концы имеют общую вершину.

Вершина, не инцидентная никакому ребру графа, называется **изолированной**. Если граф состоит из изолированных вершин, его называют **ноль-графом.**

2.1.2 Ориентированные и неориентированные графы

Ребро графа называется **неориентированным**, если порядок расположения его концов (направление стрелок) в графе не принимается во внимание. Ребро графа называется **ориентированным**, если этот порядок существенен.

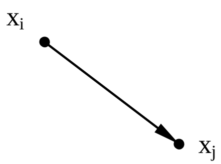


Рис. 2.2 – Дуга ориентированного графа

В этом случае говорят, что для ребра $g(x_i, x_j)$ x_i – начальная, а x_j – конечная вершины ребра. Ориентированное ребро называют также **дугой** графа (рис.2.2).

Граф называется **неориентированным**, если каждое ребро его не ориентированно, и **ориентированным**, если каждое ребро его ориентированно. Если граф содержит как ориентированные, так и неориентированные ребра, он называется **смешанным**.

Для каждого графа G(X) существует **обратный граф**.$G^{-1}(X)$, полученный изменением ориентации каждого из ребер графа G(X) на противоположную.

Полным неориентированным графом называется граф U(X), ребрами которого являются всевозможные пары $g(x_i, x_j,)$ для двух возможных $x_i, x_j \in X$, $i \neq j$ (рис.2.3).

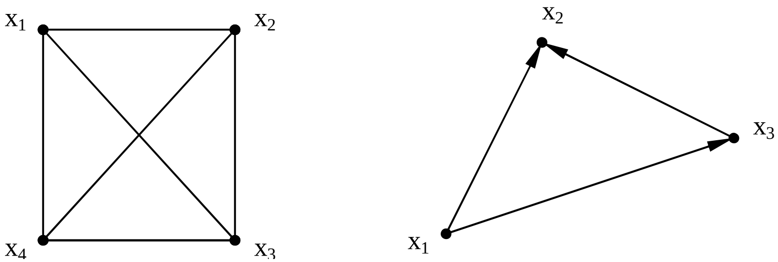


Рис. 2.3 – Полный неориентированный и полный ориентированный графы

Полным ориентированным графом $U_0(X)$ называется граф, у которого любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении.

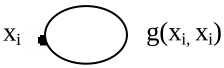


Рис. 2.4 - Петля

Петлей называется ребро $g(x_i\ ,\ x_i)$, у которого начальная и конечная вершины совпадают (рис.2.4) Петля обычно считается неориентированной.

Мультиграфом называется граф, в котором пара вершин соединяется несколькими различными ребрами или дугами (рис.2.5).

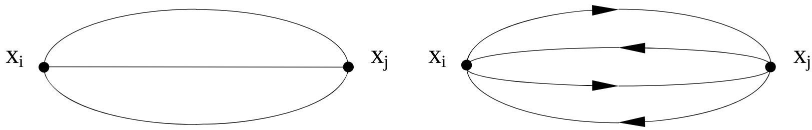


Рис. 2.5 – Неориентированный и ориентированный мультиграфы

Дополнением графа $G(X)$ является такой граф $G_k(X)$, ребра которого совместно с графом $G(X)$ образуют полный $U(X)$ граф.

2.1.3 Цепи, циклы, пути и контуры графов

Для неориентированных графов справедливы следующие понятия.

Цепь – конечная или бесконечная последовательность ребер

$S = (\ldots, g_1, g_2, \ldots)$, в которой у каждого ребра g_k одна из вершин является вершиной ребра g_{k-1}, а другая – вершиной ребра g_{k+1}. При этом одно и то же ребро или вершина может встречаться несколько раз (рис.2.6):

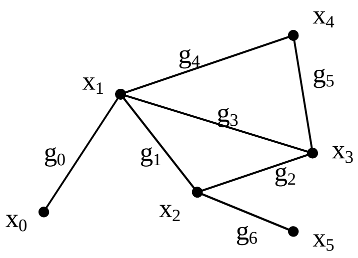


Рис. 2.6 – Пример цепи

$\{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_2, g_6\} = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_5)\}$.

Цепь называется **простой**, если все ребра в ней различны, и **составной или сложной** – в противном случае. Вершины в простой цепи могут повторяться. Цепь называется **элементарной,** если в ней ни одна из вершин не повторяется.

Циклом называется конечная цепь, начинающаяся на некоторой вершине x_i и оканчивающаяся на той же вершине.

Простые, составные или сложные, элементарные циклы – по аналогии с цепями.

Для ориентированных графов введены следующие дополнительные понятия.

Путем в графе G(X) называется такая последовательность дуг $(g_1, g_2, \ldots)$, что конец каждой предыдущей дуги является началом следующей. Существуют простые, составные (сложные), элементарные пути.

Контур графа – это конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Существуют простые, составные (сложные), элементарные контуры.

Длина пути есть число дуг L(s) в последовательности дуг пути s. В случае бесконечного пути $L(s) = \infty$.

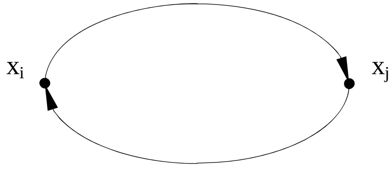


Рис. 2.7 – Симметрический граф

Граф называется **симметрическим**, если $\forall\, x_i, x_j$ из того, что $x_i \in G(x_j) \Rightarrow x_j \in G(x_i)$, то есть две смежные вершины x_i, x_j всегда соединены противоположно ориентированными дугами (рис.2.7).

Граф называется **антисимметрическим,** если $\forall\ x_i, x_j;\ x_i \in G(x_j) \Rightarrow x_j \notin G(x_i)$, то есть каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении.

2.1.4 Конечный и бесконечный графы

Граф называется **конечным**, если число его вершин конечно. Граф G(X) называется **G – конечным**, если для каждой его вершины $x \in X$ множество G(x) конечно, и **бесконечным**, если число вершин бесконечно. Если обозначить |X| – число элементов множества X, то

граф G(X) **конечен**, если $|X| < \infty$,

граф G(X) **G – конечен**, если $|G(x)| < \infty\ \forall\ x \in X$,

граф G(X) **G^{-1}- конечен**, если $|G^{-1}(x)| < \infty\ \forall\ x \in X$.

Граф G(X) называется **локально конечным**, если он одновременно G - и G^{-1} - конечен. Очевидно, что всякий конечный граф локально конечен.

2.1.5 Частичные графы, подграфы, частичные подграфы

Граф H(x) называется **частичным** для графа G(X), если все ребра H(X) являются ребрами G(X) и множество вершин графа H(X) совпадает с множеством вершин графа G(X), то есть $H(x) \subset G(x)\ \forall\ x \in X$ (рис.2.8).

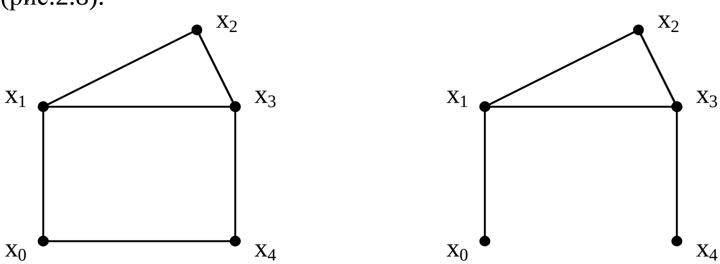


Рис. 2.8 – Граф G(X) и частичный для него граф H(X)

Частичный граф содержит ***часть ребер*** (дуг). Он также может быть ориентированным или неориентированным в зависимости от исходного.

Отметим, что ноль-граф графа G(X) считается частичным графом каждого графа. Все частичные графы H(X) для G(X) можно получить, выбирая в качестве ребер H(X) всевозможные подмножества множества ребер графа G(X).

Подграфом $G_A(A)$ графа G(X), где $A \subset X$, называется граф, вершинами которого являются элементы множества $A \subset X$, а ребрами – все ребра из G, оба конца которых лежат в A (рис.2.9).

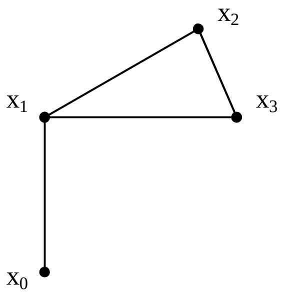


Рис. 2.9 – Подграф $G_A(A)$ графа G(X)

Таким образом, подграф содержит ***часть вершин*** вместе с ребрами, соединяющими эти вершины. Иначе, $G_A(A)$ – подграф графа G(X), если $A \subset X$ и $G_A(x) = G(x) \cap A$. Если A = X, то $G_A(A) = G(X)$. Для единственной вершины A={a} подграф $G_A(a)$ состоит из петель в a. Подграфом $G_A(A)$ графа G(X) будет ноль-граф, если $A \subset X$ есть подмножество изолированных вершин графа G(X). Подграф будет ориентированным или неориентированным в зависимости от графа.

Частичным подграфом $H_A(A)$, $A \subset X$ графа G(X) называется подграф (рис.2.10), ребрами которого являются некоторые ребра из G(X), оба конца которых лежат в A. Иначе, $H_A(A)$ – частичный подграф графа G(X), если $A \subset X$ и $H_A(x) \subset G(x) \cap A\ \forall\ x \in X$.

Дополнительным частичным графом H(A) графа G(X) является единственный граф, состоящий из ребер графа G(X), не принадлежащих некоторому частичному подграфу $H_A(A)$ графа G(X) (рис.2.11).

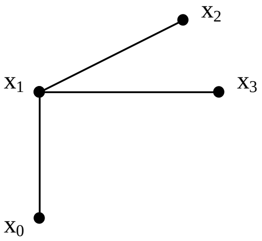


Рис. 2.10 – Частичный подграф $H_A(A)$ графа G(X)

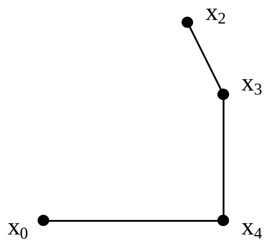


Рис. 2.11 – Дополнительный частичный граф H(A) графа G(X)

Звездным графом, определяемым вершиной x, называется граф, состоящий из всех ребер G(X), имеющих x концевой вершиной. Петли в x могут как включаться, так и не включаться в звездный граф.

2.1.6 Связность в графах

Рассмотрим вопрос о связности в графах. Пусть G(X) – неориентированный граф. Две вершины x_i, x_j называется **связными**, если существует цепь S с концами x_i и x_j. Если S проходит через некоторую вершину x_k более одного раза, то можно удалить цикл в вершине x_k из цепи S. Отсюда следует, что вершины, связанные цепью, связаны элементарной цепью.

Неориентированный граф называется **связным**, если любая пара его вершин связана. Отношение связности для вершин графа есть отношение эквивалентности ($x_i \sim x_j$, $x_j \sim x_k$, $\Rightarrow x_i \sim x_k$).

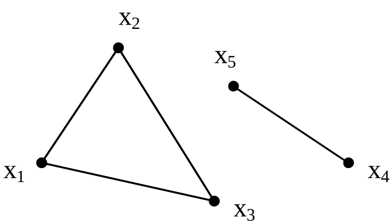


Рис. 2.12 – Граф с двумя компонентами связности

Компонентой связности неориентированного графа G(X) называется подграф $H_A(A)$ графа G(X) с множеством вершин $A \subset X$ и множеством ребер в G(X), инцидентных только вершинам из A, причем ни одна вершина из $x_i \in A$ не смежна с вершинами из множества X \ A (рис.2.12).

Ориентированный граф называется **сильно связным**, если для любой пары вершин найдется путь, соединяющий их.

Компонентой сильной связности ориентированного графа G(X) называется подграф $H_A(A)$ графа G(X) (подчиняющийся определению сильно связного графа) с множеством вершин $A \subset X$ и множеством дуг, имеющих начало и конец в A, причем ни одна из вершин $x_i \in A$ и $x_j \in X \setminus A$ не смежны между собой (рис.2.13).

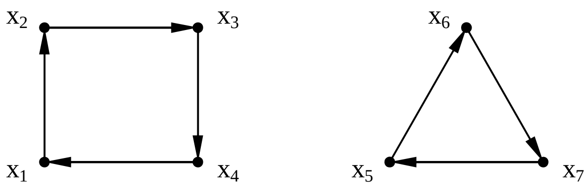


Рис. 2.13 – Ориентированный граф с двумя компонентами сильной связности

Очевидно, что ориентированный граф G(X) сильно связан тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту связности.

На практике широко используются такие виды графов, как деревья и прадеревья.

Деревом называется конечный связный неориентированный граф, состоящий по крайней мере из двух вершин и не содержащий циклов. Такой граф не имеет петель и кратных ребер (рис.2.14).

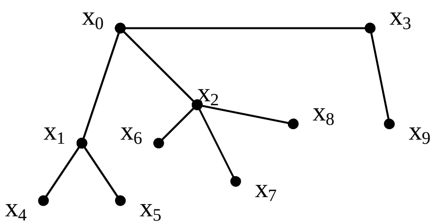


Рис. 2.14 – Дерево

Ветвями дерева называются ребра графа, входящие в дерево. **Хордами дерева** называются ребра, входящие в граф, дополнительный к данному дереву.

Лагранжевым деревом называется дерево, все ветви которого имеют общую вершину.

Лесом называется несвязный граф, каждая компонента связности которого является деревом.

Прадеревом называется ориентированный граф G(X) с корнем $x_1 \in X$, если в каждую вершину $x_i \neq x_1$ ($x_i \in X$) заходит ровно одна дуга, в вершину x_1 не заходит ни одна дуга, граф G(X) не содержит контуров (рис.2.15).

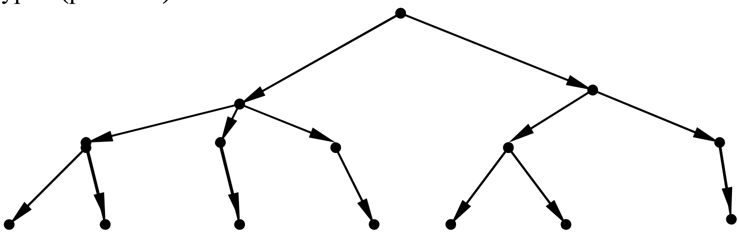


Рис. 2.15 – Прадерево

2.1.7 Изоморфизм. Плоские графы

В изображении графа имеется относительно большая свобода в размещении вершин и в выборе формы соединяющих их ребер. Поэтому один и тот же граф может быть представлен (на плоскости) по-разному (рис. 2.16).

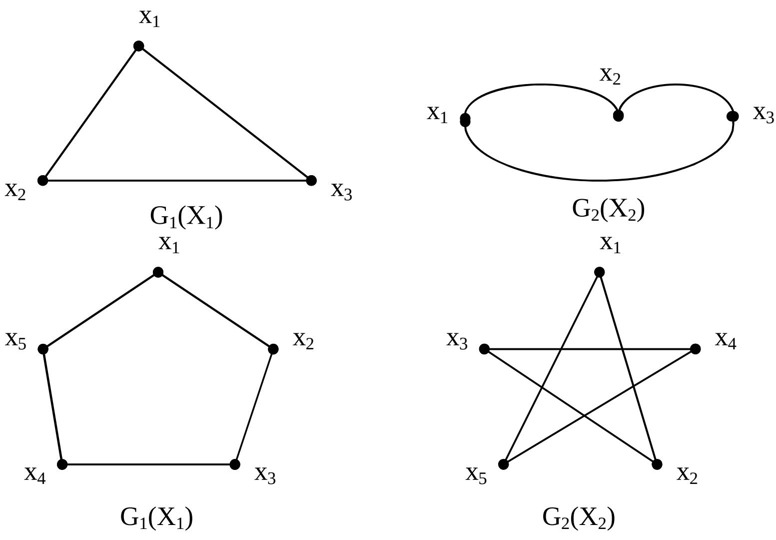


Рис. 2.16 – Примеры изоморфных графов

Графы $G_1(X_1)$, $G_2(X_2)$ называются **изоморфными**, если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие, такое, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра графов ориентированы, то их направление в изоморфных графах также должно соответствовать друг другу.

Граф G(X) называется **плоским,** если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения его ребер являются вершинами графа G(X) (рис.2.17).

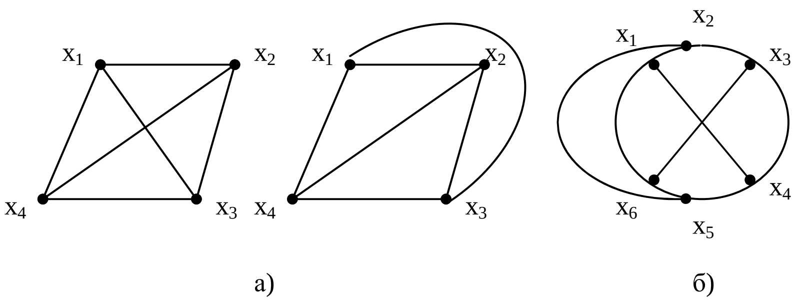


Рис. 2.17 – Примеры плоского (а) и неплоского (б) графов

2.2 Отношения на множествах и графы

Каждый ориентированный граф G(X) определяет некоторое отношение на множестве X своих вершин. Это отношение может быть записано как $x_i G\ x_j$. Оно означает, что в графе есть дуга, идущая от x_i к x_j .

Отношению со свойством **рефлексивности** (x R x) должна соответствовать на графе *петля* в вершине. Если это отношение соблюдается во всех вершинах $x \in X$, то соответствующий граф G(X) должен иметь петлю в каждой своей вершине. В случае **антирефлексивного** отношения на множестве X, соответствующий граф ни в одной из вершин не имеет петли.

Симметрическому отношению на множестве X соответствует граф с *неориентированными* ребрами и наоборот граф с неориентированными ребрами определяет некоторое симметрическое отношение. В случае **антисимметрического** отношения на графе невозможно присутствие двух дуг (x_i, x_j), (x_j, x_i) на графе, то есть существование неориентированного ребра. Кроме того, на этих графах нет петель, то есть соответствующее антисимметрическое отношение антирефлексивно.

Отношение, обладающее свойством **тождественности**, соответствует графу с антисимметричным отношением на множестве вершин (ориентированному графу) и добавлением петли в каждой вершине. Этот граф не должен иметь контуров.

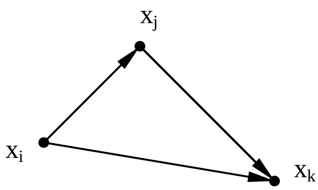


Рис. 2.18 – Свойство транзитивности на графе

Граф, соответствующий **транзитивному** отношению (рис.2.18), обладает следующими свойствами: для любой пары ориентированных ребер (дуг) графа (x_i, x_j),(x_j, x_k) имеется замыкающая дуга (x_i, x_k). Можно сказать, что в графе, который соответствует транзитивному отношению, для каждого пути $S(x_i, x_k)$ имеется дуга (x_i, x_k) (рис.2.19).

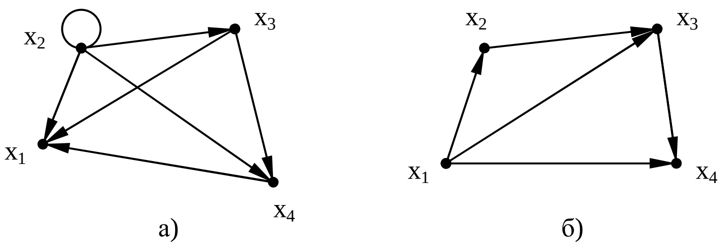


Рис. 2.19 – Примеры транзитивного (а) и нетранзитивного (б) графов

Отношение, обладающее свойством **полноты**, определено на множестве вершин полного ориентированного графа.

Нулевое отношение определено на множестве вершин нуль-графа.

Универсальное отношение определено на множестве вершин полного неориентированного графа с петлями.

Дополнительное к R отношение $\overline{R}$ определено на множестве вершин дополнительного $G_k(X)$графа к графу G(X).

Графы, соответствующие отношению **эквивалентности**, представляют собой совокупность компонент связности (для каждого класса эквивалентности своя компонента) несвязного графа. Каждая компонента несвязного графа должна быть полным неориентированным графом с петлями (рис. 2.20).

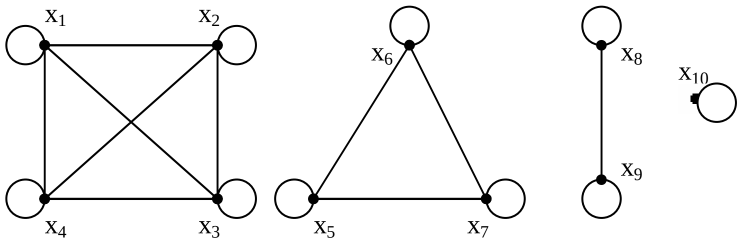


Рис. 2.20 – Граф, соответствующий отношению эквивалентности

При рассмотрении отношения **квазипорядка** соответствующий граф должен иметь петли в каждой вершине и может иметь неориентированные и ориентированные ребра. В отличие от предыдущего случая здесь не соблюдается свойство симметричности (рис. 2.21, а, б, в).

Граф, на множестве вершин которого определено отношение эквивалентности, одновременно является графом, на множестве вершин которого определено отношение квазипорядка.

Граф, на множестве вершин которого определено отношение **порядка**, является также графом, на множестве вершин которого определено отношение квазипорядка. Этот граф:

- имеет петли во всех вершинах;
- для каждого пути $S(x_i, x_k)$ должен иметь замыкающую дугу (x_i, x_k);
- не должен иметь контуров и все ребра должны быть ориентированы (рис. 2.21, в).

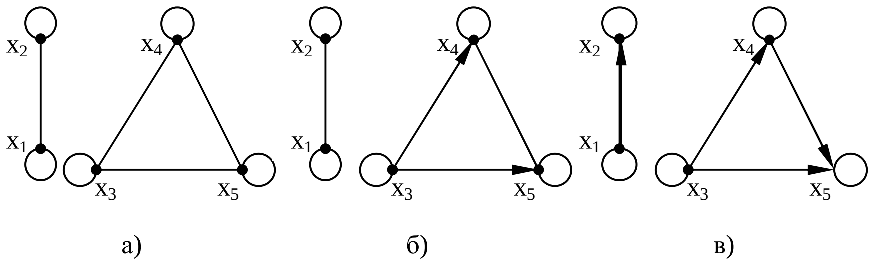


Рис. 2.21 – Примеры графов, на которых определено отношение квазипорядка

Граф, на множестве вершин которого определено отношение **строгого порядка**, получается удалением всех петель в графе, на множестве вершин которого определено отношение порядка.

Отношение **полного порядка** соответствует каждой компоненте связности графа, на множестве вершин которого определено отношение порядка.

Если на графе G(X) определено одно из отношений эквивалентности, квазипорядка, порядка, строгого порядка, полного порядка, нулевое, универсальное, дополнительное, то данное отношение сохраняется и на графе $G^{-1}(X)$.

2.3 Матрицы смежности и инциденций графа

Если в графе G(X) через a_{ij} обозначить число дуг, идущих из x_i в x_j, то матрица $\| a_{ij} \|$ с n строками и n столбцами называется **матрицей смежности вершин графа.** Здесь a_{ij} – элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, a_i – i-я вектор-строка, a_j – j-й вектор-столбец.

Наличие нулевого элемента на главной диагонали означает отсутствие петли в соответствующей вершине.

Матрица A^T соответствует графу $G^{-1}(X)$.Матрица A является симметрической тогда и только тогда, когда граф G(X) – симметрический. Матрица A антисимметрична тогда и только тогда, когда граф G(X) – антисимметрический. Матрица A полна тогда и только тогда, когда граф G(X) – полный ($a_{ij} + a_{ji} \geq 1$).

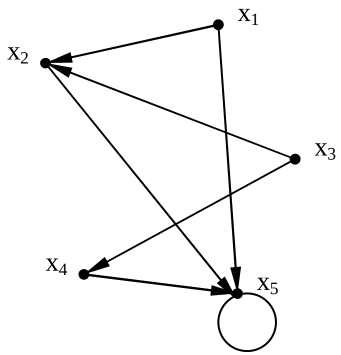


Рис. 2.22 – Пример графа для определения матрицы смежности A

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрицей смежности ребер графа называется такая матрица $B = \| b_{ij} \|$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, m$, где m – число ребер графа), что

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребра } g_i \text{ и } g_j \text{ имеют общий конец,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $g_1, \ldots, g_m$ – дуги, а $x_1, \ldots, x_n$ – вершины ориентированного графа $G(X)$. Матрица $S = \| s_{ij} \|$ ($i = 1, \ldots, n$ – номер вершины графа, $j = 1, \ldots, m$ – номер дуги графа), такая что

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } g_j \text{ исходит из } x_i, \\ -1, \text{ если } g_j \text{ заходит в } x_i, \\ 0, \text{ если } g_j \text{ не инцидентна } x_i \end{cases}$$

называется **матрицей инциденций для дуг** графа.

Матрица $R = \| r_{ij} \|$ размером $n \times m$, где

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ инцидентна } g_j \ (j = 1, \ldots, m), \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

называется **матрицей инциденций для ребер** графа (рис. 2.23).

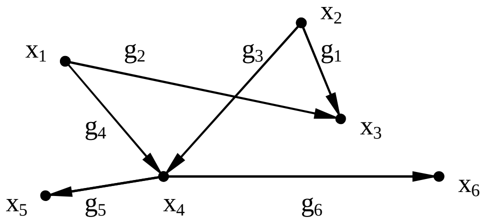


Рис. 2.23 – Пример графа для определения матриц инциденций S и R

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Операции над графами

Сумма графов

Пусть даны два графа $G_1(X)$ и $G_2(X)$ на одном и том же множестве вершин. Тогда **суммой** $G(X)$, графов$G_1(X)$ и $G_2(X)$ является граф, состоящий из ребер, принадлежащих $G_1(X)$, либо $G_2(X)$. Таким образом, если $(x_i', x_j') \in G_1(X)$и $(x_i'', x_j'')\in G_2(X)$, то $(x_i', x_j')\in G(X)$ и $(x_i'', x_j'')\in G(X)\ \forall\ (x_i', x_j', x_i'', x_j'')\in X$.

Символически сумму двух графов обозначают следующим образом: $G(X) = G_1(X) \cup G_2(X)$. Аналогично определяется сумма n графов $G_i(X)$ (i =1, …, n):

$$G(X) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(X)$$

как граф, состоящий из ребер, принадлежащих хотя бы одному из графов $G_i(X)$ (рис. 2.24, а, б).

Операция суммирования графов обладает переместительным свойством, то есть $G_1(X) \cup G_2(X) = G_2(X) \cup G_1(X)$.

Пример 1.

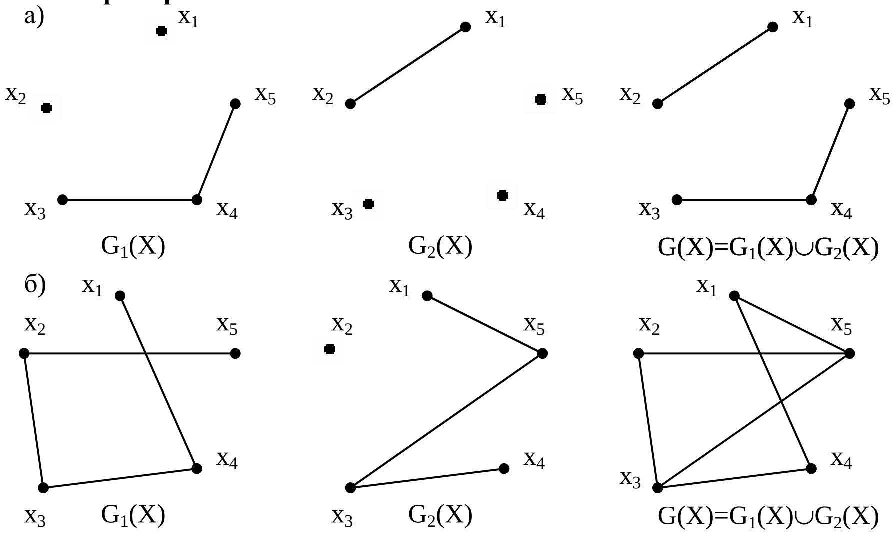


Рис. 2.24 – Примеры операции суммирования графов

Рассмотрим случай, когда операция суммы графов применяется к графам, определенным на различных множествах вершин. Тогда суммой G(X) будет граф

$$G(X) = G_1(X_1) \cup G_2(X_2) \cup \ldots \cup G_n(X_n) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(X_i),$$

для которого справедливо: $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ и

$$G(x_j) = G_1(x_j) \cup G_2(x_j) \cup \ldots \cup G_n(x_j) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(x_j),\ \ x_j \in X \text{ (рис. 2.25).}$$

Пример 2.

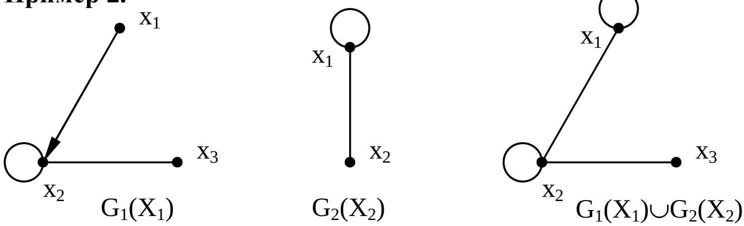


Рис. 2.25 – Суммирование графов с различными множествами вершин

Пересечение графов

Пусть даны два графа $G_1(X)$ и $G_2(X)$ на одном и том же множестве вершин. Тогда **пересечением** графов $G_1(X)$ и $G_2(X)$ называется граф $G(X)$, состоящий из ребер, принадлежащих и $G_1(X)$ и $G_2(X)$, то есть если $(x_i, x_j) \in G_1(X)$ и $(x_i, x_j) \in G_2(X)$, то $(x_i, x_j) \in G(X)$.

Обозначение пересечения двух графов: $G(X) = G_1(X) \cap G_2(X)$.

Аналогично пересечение n графов $G_i(X)$ ($i = 1, \ldots, n$) обозначается как

$G_i(X) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i(X)$ и определяет граф $G(X)$, состоящий из ребер, принадлежащих одновременно всем графам $G_i(X)$.

Для графов, используемых в примере 1 (рис. 2.24), имеем:

а) $G_1(X) \cap G_2(X) = \varnothing$ (ноль - граф);

б) пересечение графов $G_1(X)$ и $G_2(X)$ изображено на рис. 2.26.

Для графов, определенных на различных множествах вершин операция пересечения определяется следующим образом:

$$G(X) = G_1(X_1) \cap G_2(X_2) \cap \ldots \cap G_n(X_n) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i(X_i),$$

где $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$

и $G(x_j) = G_1(x_j) \cap G_2(x_j) \cap \ldots \cap G_n(x_j) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i(x_j)$,

$x_j \in X$.

Пересечение графов $G_1(X_1)$ и $G_2(X_2)$ примера 2 изображено на рис. 2.27.

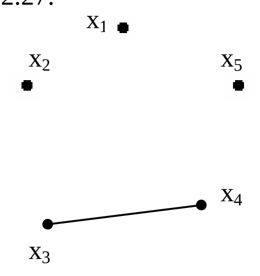


Рис. 2.26 – Пересечение графов примера 1, б

Рис. 2.27 – Пересечение графов примера 2

Композиция графов

Композицией (произведением) двух графов $G_1(X)$ и $G_2(X)$ с одним и тем же множеством вершин X является граф, у которого множество вершин, смежных с вершиной x_i, состоит из всех вершин, достижимых из x_i цепью длины два, первое ребро которой принадлежит $G_2(X)$, а второе – $G_1(X)$ (рис. 2.28). Здесь $(x_i, x_j) \in G_2(X)$, $(x_j, x_k) \in G_1(X)$, $(x_i, x_k) \in G_1(G_2(X))$.

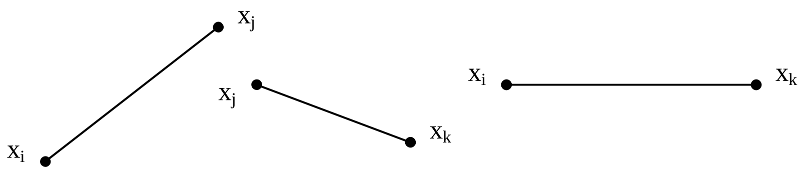


Рис. 2.28 – Иллюстрация операции композиции

Композиция графов обозначается как $G(X) = G_1(G_2(X))$ (на рис. 2.29 изображен пример композиции).

Пример 3.

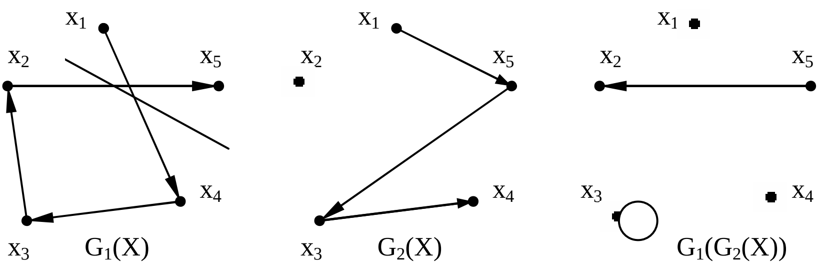


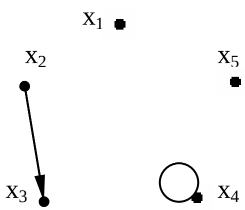
Рис. 2.29 – Пример композиции графов

Композицию графов, изображенных на рис. 2.29, иллюстрирует табл.2.1.

Таблица 2.1 – Соответствие между вершинами графов (рис. 2.29)

Соответствие Вер-шина	$(x_i, x_j) \in G_1(X)$	$(x_i, x_j) \in G_2(X)$	$(x_i, x_j) \in G_1(G_2(X))$	$(x_i, x_j) \in G_2(G_1(X))$
x_1	(x_1, x_4)	(x_1, x_5)	$\varnothing$	$\varnothing$
x_2	(x_2, x_5)	$\varnothing$	$\varnothing$	(x_2,x_3)
x_3	(x_3, x_2)	(x_3, x_4)	(x_3, x_3)	$\varnothing$
x_4	(x_4, x_3)	$\varnothing$	$\varnothing$	(x_4,x_4)
x_5	$\varnothing$	(x_5, x_3)	(x_5, x_2)	$\varnothing$

На основе таблицы можно построить $G_1(G_2(X))$ и $G_2(G_1(X))$ (рис. 2.30).



$G_2(G_1(X))$

Рис.2.30 – Композиция $G_2(G_1(X))$

Транзитивное замыкание графов

Пусть имеется нетранзитивный ориентированный граф G(X). Его можно сделать транзитивным, добавляя дуги с целью получения замыкающей дуги (x_i, x_k) для каждой пары его последовательных дуг (x_i, x_j) и (x_j, x_k). В этом случае говорят, что транзитивный граф $G_{тр}(X)$ получен из нетранзитивного G(X) при помощи **транзитивного замыкания** графа (аналогично транзитивному замыканию отображений)

$$G_{тр}(X) = \{x\} \cup G(x) \cup G^2(x) \cup G^3(x), \ldots, \qquad x \in X.$$

Пример 4.

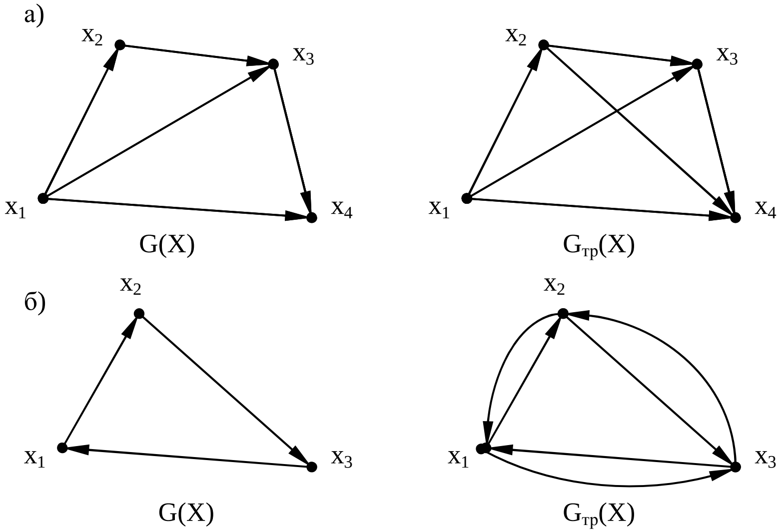


Рис. 2.31 – Примеры транзитивного замыкания графов

Декартово произведение

Декартовым произведением двух графов $G_1(X_1)$ и $G_2(X_2)$ называется граф $G(X) = G_1(X_1) \times G_2(X_2)$, определенный следующим образом:

а) множество вершин X является декартовым произведением множеств X_1 и X_2: $X = X_1 \times X_2 = \{(x_{i1}, x_{j2}) / x_{i1} \in X_1, x_{j2} \in X_2\}$;

б) множество вершин, смежных с вершиной (x_{i1}, x_{j2}) декартова произведения двух графов, определяется как $G(x_{i1}, x_{j2}) = G_1(x_{i1}) \times G_2(x_{j2})$, т.е. как декартово произведение множеств вершин графа $G_1(X_1)$, смежных с x_{i1} и графа $G_2(X_2)$, смежных с x_{j2}. Пример приведен на рис. 2.32.

Пример 5.

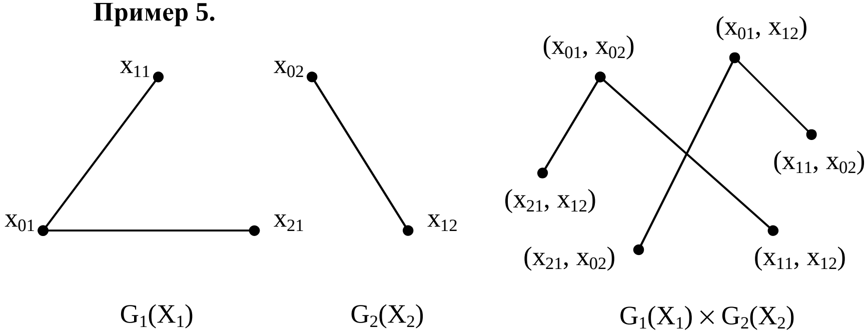


Рис. 2.32 – Декартово произведение графов

Для **примера 5**

$G_1(x_{01})=\{x_{11}, x_{21}\}$,

$G_1(x_{11})= x_{01}$,

$G_1(x_{21})= x_{01}$,

$G_2(x_{02})=x_{12}$,

$G_2(x_{12})=x_{02}$,

$G(x_{01},x_{02})=\{(x_{11},x_{12}), (x_{21},x_{12})\}$,

$G(x_{01}, x_{12})=\{(x_{11}, x_{02}), (x_{21}, x_{02})\}$,

$G(x_{11}, x_{02})=(x_{01}, x_{12})$,

$G(x_{11}, x_{12})=(x_{01}, x_{02})$,

$G(x_{21}, x_{02})=(x_{01}, x_{12})$,

$G(x_{21}, x_{12})=(x_{01}, x_{02})$.

Пусть даны n графов $G_1(X_1)$, $G_2(X_2)$, ..., $G_n(X_n)$. тогда граф $G(X)= G_1(X_1) \times G_2(X_2) \times ... \times G_n(X_n)$ называется **декартовым произведением** указанных графов, если

а) $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}$;

б) $G(x_1, x_2, ..., x_n) = G_1(x_1) \times G_2(x_2) \times ... \times G_n(x_n)$ – декартово произведение подмножеств вершин графов $G_i(x_i)$ $(i = 1, ..., n)$, смежных с вершинами $x_1, x_2, ..., x_n$.

Декартова сумма графов

Декартовой суммой графов $G_1(X_1)$ и $G_2(X_2)$ $G(X) = G_1(X_1) + G_2(X_2)$ называется граф, определенный следующим образом:

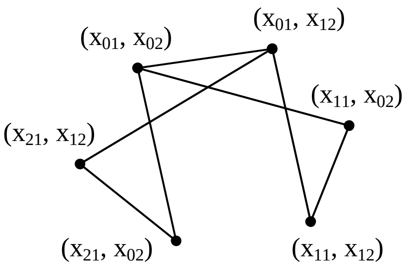
а) множество вершин X является декартовым произведением X_1 и X_2, т.е. $X = X_1 \times X_2 = \{(x_{i1}, x_{j2}) / x_{i1} \in X_1, x_{j2} \in X_2\}$;

б) множество вершин, смежных с вершиной (x_{i1}, x_{j2}) определяется как $G(x_{i1}, x_{j2}) = [G_1(x_{i1}) \times \{x_{j2}\}] \cup [\{x_{i1}\} \times G_2(x_{j2})]$ ($\times$ – операция декартова произведения).

Для **примера 5**

$G(x_{01}, x_{02}) = \{G_1(x_{01}) \times \{x_{02}\}\} \cup \{\{x_{01}\} \times G_2(x_{02})\} =$
$= \{(x_{11}, x_{02}), (x_{21}, x_{02})\} \cup \{(x_{01}, x_{12})\},$
$G(x_{01}, x_{12}) = \{G_1(x_{01}) \times \{x_{12}\}\} \cup \{\{x_{01}\} \times G_2(x_{12})\}=$
$= \{(x_{11}, x_{12}),(x_{21}, x_{12})\} \cup \{(x_{01}, x_{02})\},$
$G(x_{11},x_{02}) = \{(x_{01}, x_{02})\} \cup \{(x_{11}, x_{12})\}$, $G(x_{11}, x_{12}) = \{(x_{01}, x_{12})\} \cup \{(x_{11}, x_{02})\}$,
$G(x_{21},x_{02}) = \{(x_{01}, x_{02})\} \cup \{(x_{21}, x_{12})\}$, $G(x_{21}, x_{12}) = \{(x_{01}, x_{12})\} \cup \{(x_{21}, x_{02})\}$.

Соответствующий граф изображен на рис. 2.33.



$G(X) = G_1(X_1) + G_2(X_2)$

Рис. 2.33 – Декартова сумма графов

Граф G(X) называется декартовой суммой n графов
$G(X) = G_1(X_1) + G_2(X_2) + ... + G_n(X_n)$, если
а) $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$;
б) $G(x_1, x_2, ... , x_n) = [G_1(x_1) \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\}] \cup [\{x_1\} \times G_2(x_2) \times ... \times \{x_n\}] \cup ... \cup [\{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times G_n(x_n)]$.

2.5 Степени графов

2.5.1 Степени неориентированных графов

Пусть G(X) – неориентированный граф. **Степенью m(x)** графа G(X) в вершине x называется число ребер, инцидентных вершине x. Если все числа m(x) для $x \in X$ конечны, то граф называется **локально конечным.** Петли можно считать одинарным или двойным ребром в зависимости от конкретной задачи.

Обозначим $m(x_i, x_j) = m(x_j, x_i)$ – число ребер, соединяющих вершины x_i и x_j. Если в графе G(X) нет кратных ребер, то $m(x_i, x_j) = 0$ или $m(x_i, x_j)=1$.

Очевидно, что $m(x_i) = \sum_{x_j \in X} m(x_i, x_j)$.

Поскольку каждое ребро учитывается в двух вершинах x_i и x_j, то общее число ребер m графа G(X)

$$m = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in X} m(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} m(x_i, x_j) \qquad (1)$$

Это выражение справедливо и для графов с петлями, если петлю считать двойным ребром.

Так как $\sum_{x_j \in X} m(x_i)$ – четное число, то можно сделать вывод о том, что в конечном графе **число вершин с нечетной степенью четно.**

Это следует из того, что если из суммы вычесть все слагаемые, соответствующие вершинам с четной степенью, она останется четной.

Граф, степени всех вершин в котором равны, называется **однородным**, т.е. $m(x_i) = m_n \; \forall \; x_i \in X$.

Конечные однородные графы могут быть представлены в виде правильных многогранников (Платоновых тел): тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра и т.д. Примеры бесконечных однородных графов изображены на рис. 2.34.

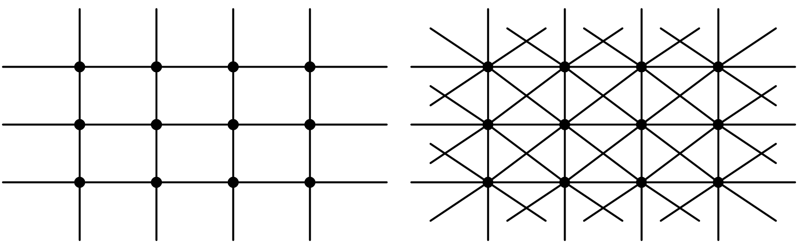


Рис. 2.34 – Бесконечные однородные графы

Из (1) следует, что в однородном графе степени m_n число ребер равно $m = \frac{1}{2} m_n \times n$, где n – число вершин.

2.5.2 Степени ориентированных графов

В ориентированном графе существуют такие понятия, как **полустепени исхода и захода**.

Полустепенью исхода $m'(x)$ называется число дуг, выходящих из вершины x. Полустепень захода $m''(x)$ – число дуг, входящих в вершину x. Петли считают по одному разу в каждой из полустепеней.

Аналогом кратности неориентированных ребер $m(x_i, x_j)$ в ориентированном графе являются две кратности: $m'(x_i, x_j)$ – число дуг, направленных от x_i к x_j, и $m''(x_i, x_j)$ – число дуг, направленных от x_j к x_i.

Таким образом, $m'(x_i, x_j) = m''(x_j, x_i)$.

Число дуг, выходящих из вершины x_i, определится суммой

$$m'(x_i) = \sum_{x_j \in X} m'(x_i, x_j) = \sum_{x_j \in X} m''(x_j, x_i),$$

а число дуг, входящих в вершину x_i, равно

$$m''(x_i) = \sum_{x_j \in X} m''(x_i, x_j) = \sum_{x_j \in X} m'(x_j, x_i).$$

Отсюда общее число дуг графа

$$m = \sum_{x_i \in X} m'(x_i) = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} m'(x_i, x_j) = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} m''(x_j, x_i).$$

Если все полустепени $m'(x)$ и $m''(x)$ равны для всех $x \in X$, то ориентированный граф G(X) называется **однородным графом** степени m_n.

Для такого графа $m = m_n \times n$, где n – число вершин графа G(X). Примеры однородных ориентированных графов приведены на рис.2.35.

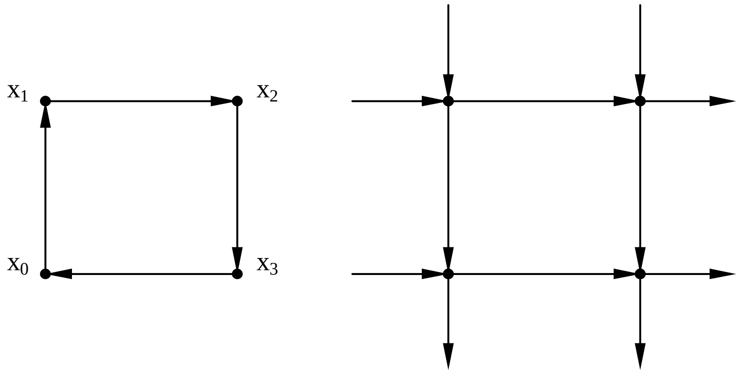


Рис. 2.35 – Конечный и бесконечный однородные ориентированные графы

2.6 Характеристики расстояний в графах

Пусть G(X) – конечный или бесконечный ориентированный граф. **Отклонением** $d(x_i, x_j)$ его вершины x_i от вершины x_j называется длина кратчайшего пути из x_i в x_j: $d(x_i, x_j) = \min\limits_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}$.

Отклонение $d(x_i, x_j)$ удовлетворяет следующим аксиомам метрического пространства:

1) $d(x_i, x_j) \geq 0$;

2) $d(x_i, x_j) = 0 \Leftrightarrow x_i = x_j$;

3) $d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k)$ – неравенство треугольника

и не удовлетворяет четвертой аксиоме, а именно:

4) $d(x_i, x_j) \neq d(x_j, x_i)$ так как граф ориентирован.

Необходимо отметить, что если $x_j \notin G(x_i)$, то $d(x_i, x_j) = \infty$.

Отклоненностью вершины x_i называется наибольшее из отклонений $d(x_i, x_j)$ по всем x_j:

$$d(x_i) = \max_{x_j \in X}\{d(x_i, x_j)\} = \max_{x_j \in X}\{\min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}.$$

В качестве примера рассмотрим схему первой (1870 г.) сети связи для почтовых голубей. Граф, представляющий ее, изображен на рис. 2.36, а матрица отклонений и вектор отклоненностей – в табл. 2.2 и табл.2.3 соответственно.

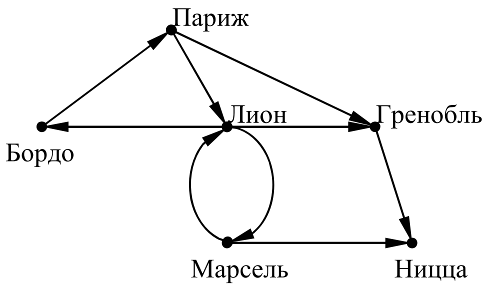


Рис. 2.36 – Схема первой сети связи для почтовых голубей

Таблица 2.2 – Матрица отклонений $d(x_i, x_j)$

Города	П	Б	Л	Г	М	Н
Париж	0	2	1	1	2	2
Бордо	1	0	2	2	3	3
Лион	2	1	0	1	1	2
Гренобль	∞	∞	∞	0	∞	1
Марсель	3	2	1	2	0	1
Ницца	∞	∞	∞	∞	∞	0

Таблица 2.3 – Вектор отклоненностей $d(x_i)$

Города	П	Б	Л	Г	М	Н
$d(x_i)$	2	3	2	∞	3	∞

Для неориентированного графа, соответствующего графу, изображенному на рис. 2.36, можно найти аналогичные характеристики, но без учета ориентации дуг. При этом матрица $d(x_i, x_j)$ оказывается симметричной.

В связном неориентированном графе понятиям отклонения и отклоненности соответствуют понятия: **расстояние** и **удаленность**.

Пусть $G(X)$ – связный неориентированный граф. В соответствии с определением связности для вершин x_i и x_j графа существует элементарная цепь $S(x_i, x_j)$ с концами x_i и x_j, причем $l(S) \geq 0$.

Расстоянием $d(x_i, x_j)$ между вершинами x_i и x_j называется длина цепи $S(x_i, x_j)$ наименьшей длины

$$d(x_i, x_j) = \min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}.$$

Удаленность вершины x_i графа G(X) есть число

$$d(x_i) = \max_{x_j \in X} \{d(x_i, x_j)\} = \max_{x_j \in X} \{ \min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}.$$

Центром графа называется вершина, в которой достигается наименьшая из отклоненностей (удаленностей), если таковая является конечным числом (Париж, Лион).

В графе может быть несколько центров, а может не быть ни одного.

Периферийной вершиной графа называется вершина с наибольшей отклоненностью или удаленностью (Гренобль, Ницца).

Радиусом ρ(G) ориентированного графа называется отклоненность его центра.

$$\rho(G) = \min_{x_i \in X} d(x_i) = \min_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} \{\min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}.$$

В примере (рис.2.36) ρ(G) = 2 (d(Париж) = d(Лион) = 2). Если в графе нет центров, то полагают, что ρ(G) = ∞. В неориентированном графе ρ(G) – удаленность центра.

Диаметром неориентированного графа называется удаленность периферийной вершины.

2.7 Определение путей и кратчайших путей в графах

2.7.1 Алгоритм определения пути в графе

Решение целого ряда практических задач, описываемых в терминах графов, зависит от существования некоторой цепи, соединяющей данную вершину с какой-либо другой. Например, в качестве вершин графа можно рассматривать исходные позиции или состояния некоторой головоломки или игры, а ребра будут указывать возможные ходы из одной позиции в другую. Ребро будет неориентированным или ориентированным в зависимости от того, обратим переход или нет.

Граф G(X) с двумя отмеченными вершинами x_i, x_j называется (x_i, x_j)-плоским, если граф G′(X) = G(X) ∪ (x_i, x_j), полученный добавлением к G(X) ребра (x_i, x_j), является плоским.

Рассмотрим алгоритм определения пути, ведущего из вершины x_i в x_j плоского графа. Если x_i не является вершиной никакого простого цикла, то при определении алгоритма пути из x_i в x_j в графе G(X) всегда выбирается самый левый или самый правый коридор (ребро) (рис. 2.37).

– – – – путь при выборе левого коридора;

……………… путь при выборе правого коридора.

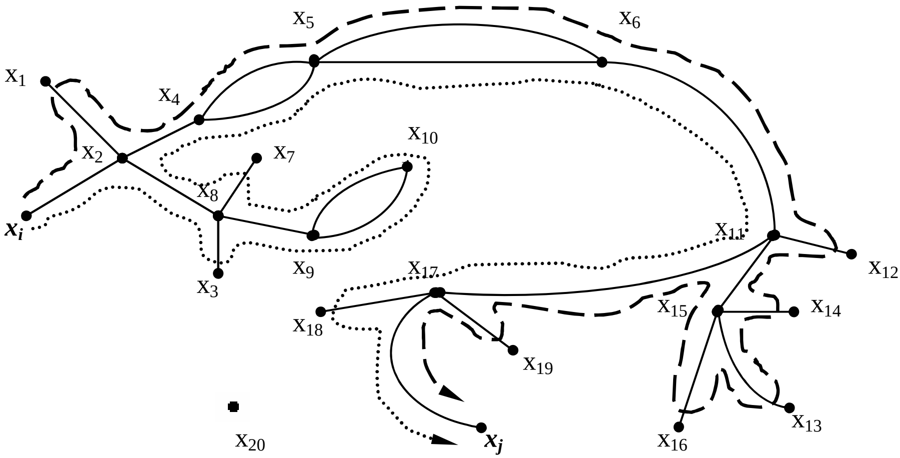


Рис. 2.37 – Определение пути в графе

Аналогичный алгоритм определения пути в прадереве предполагает следующие действия. Из корня идти по какой-либо ветви насколько возможно далеко, затем возвратиться на какой-нибудь перекресток и отправиться по новому направлению (еще не пройденному) и т.д. Искомый путь из x_i в x_j будет состоять из всех тех ребер, которые в процессе поиска были пройдены по одному разу.

При определении пути в произвольном графе, не являющемся прадеревом, приходим к предыдущему случаю следующим образом. Если, пройдя по некоторому ребру g, попадаем на уже пройденный ранее перекресток x, то ребро g «отсекается» от одной из своих концевых точек. После отсечения ребра, пройденные хотя бы один раз, образуют прадерево.

При определении пути в графе с помощью **алгоритма Тарри** необходимо в данном алгоритме пользоваться правилом:

- не проходить дважды по одному ребру в одном и том же направлении;
- находясь в вершине x, не выбирать того ребра, которое привело в данную вершину в первый раз (если есть возможность другого выбора).

2.7.2 Алгоритм определения кратчайших путей в графе

Эта задача имеет большое значение в практических применениях. К ней сводятся многие задачи выбора наиболее экономичного (с точки зрения расстояния или стоимости) маршрута на имеющейся карте дорог, наиболее экономичного способа перевода динамической системы из одного состояния в другое и т.д. Существует много математических способов решения, но часто методы, основанные на теории графов, наименее трудоемки.

Рассмотрим **задачу о кратчайшем пути**. Пусть дан G(X), дугам которого приписаны веса (расстояния, стоимости), задаваемые матрицей $C = \left\| c_{ij} \right\|$. Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины $s \in X$ до заданной конечной вершины $t \in X$ при условии, что такой путь существует. В общем случае возможно $C_{ij} > 0$, $C_{ij} < 0$, $C_{ij} = 0$. Единственное ограничение состоит в том, чтобы в графе G(X) **не было циклов** с отрицательным суммарным весом.

Приведем очень простой и эффективный **алгоритм Дейкстры** решения этой задачи для случая $C_{ij} \geq 0 \ \forall \ i, j$. Алгоритм основан на приписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от s к этой вершине. Величины этих пометок постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Это означает, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Опишем этот алгоритм.

Пусть $l(x_i)$ – пометка вершины x_i. Алгоритм Дейкстры состоит из следующих этапов.

Присвоение начальных значений

Шаг 1. Положить $l(s) = 0$ и считать эту пометку постоянной. Положить $l(x_i) = \infty\ \forall\ x_i \neq s$ и считать эти пометки временными. Положить $p = s$.

Обновление пометок

Шаг 2. Для всех $x_i \in G(p)$, пометки которых являются временными, изменить пометки в соответствии с выражением

$$l(x_i) = \min\,[l(x_i),\ l(p) + c(p, x_i)] \qquad (2)$$

Превращение пометки в постоянную

Шаг 3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую x_i^*, для которой $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$. Считать пометку вершины x_i^* постоянной и положить $p = x_i^*$.

Шаг 4, а (выполняется в случае, если требуется найти лишь путь от s к t). Если $p = t$, то $l(p)$ является длиной кратчайшего пути. **Останов.** Если $p \neq t$, перейти к шагу 2.

Шаг 4,б (Выполняется в случае, если требуется найти путь от s ко всем остальным вершинам). Если все вершины отмечены как постоянные, то эти отметки дают длины кратчайших путей. **Останов.** Если некоторые пометки являются временными, перейти к шагу 2.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере графа, изображенного на рис.2.38, матрица весов которого дана в табл.2.4. Здесь каждое ребро рассматривается как пара противоположно ориентированных дуг равного веса. Требуется найти все кратчайшие пути от x_1 ко всем остальным вершинам. Постоянные пометки будем обозначать знаком $^+$.

Шаг 1. $l(x_1) = 0^+$, $l(x_i) = \infty\ \forall\ x_i \neq x_1$, $p = x_1$.

Первая итерация.

Шаг 2. $G(p) = G(x_1) = \{x_2, x_7, x_8, x_9\}$.Все эти вершины имеют временные пометки.

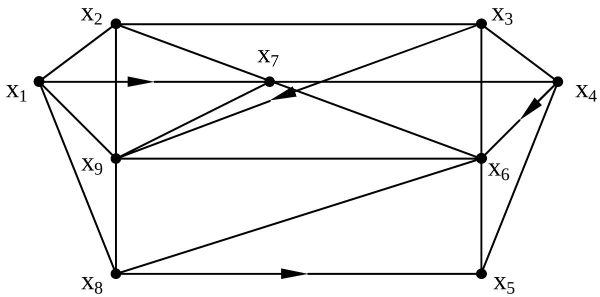


Рис.2.38 – Пример графа к алгоритму Дейкстры

Таблица 2.4 – Матрица смежности с весами для графа на рис. 2.38

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1		10					3	6	12
x_2	10		18				2		13
x_3		18		25		20			7
x_4			25		5	16	4		
x_5				5		10			
x_6			20		10		14	15	9
x_7		2		4		14			24
x_8	6				23	15			5
x_9	12	13				9	24	5	

Уточняем пометки в соответствии с формулой (2).

$l(x_2) = \min(\infty, 0^+ + 10) = 10$, аналогично $l(x_7) = 3$, $l(x_8) = 6$, $l(x_9) = 12$.

Шаг 3. $\min(\underset{x_2}{10}, \underset{x_7}{3}, \underset{x_8}{6}, \underset{x_9}{12}, \underbrace{\infty}_{x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6}) = 3$,

соответственно x_7 получает постоянную пометку $l(x_7) = 3^+$, $p = x_7$.

Шаг 4. Не все вершины имеют постоянные пометки, поэтому переходим к шагу 2. Значения пометок вершин графа приведены на рис. 2.39. Обведены вершины с постоянными пометками.

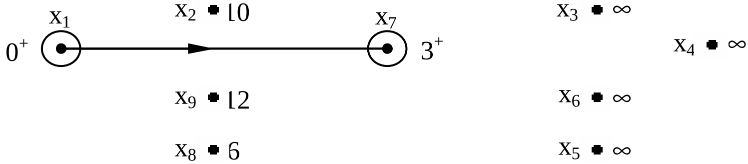


Рис. 2.39 – Пометки в начале второй итерации

Вторая итерация.

Шаг 2. $G(p) = G(x_7) = \{x_2, x_4, x_6, x_9\}$.Пометки всех этих вершин временные. Из (2) получим $l(x_2) = 5$, $l(x_4) = 7$, $l(x_6) = 17$, $l(x_9) = 12$.

Шаг 3. $\min(\underset{x_2}{5},\ \underset{x_4}{7},\ \underset{x_6}{17},\ \underset{x_8}{6},\ \underset{x_9}{12},\ \underbrace{\infty}_{x_3,\, x_5}) = 5,$

соответственно x_2 получает постоянную пометку. $l(x_2) = 5^+$, $p = x_2$.

Шаг 4. Перейти к шагу 2. Значения пометок приведены на рис. 2.40.

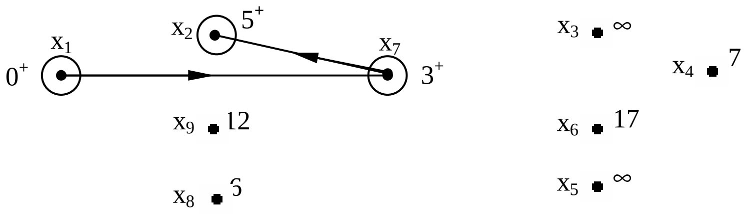


Рис. 2.40 – Пометки в начале третьей итерации

Третья итерация.

Шаг 2. $G(p) = G(x_2) = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$. Только вершины x_3 и x_9 имеют временные пометки. Из (2) получаем: $l(x_3) = \min(\infty, 5^+ + 18) =$ $=23$, аналогично $l(x_9) = 12$.

Шаг 3. $\min(\underset{x_3}{23},\ \underset{x_4}{7},\ \underset{x_6}{17},\ \underset{x_8}{6},\ \underset{x_9}{12},\ \underset{x_5}{\infty}) = 6,$

соответственно x_8 получает постоянную пометку $l(x_8) = 6^+$, $p = x_8$.

Шаг 4. Перейти к шагу 2 (рис. 2.41).

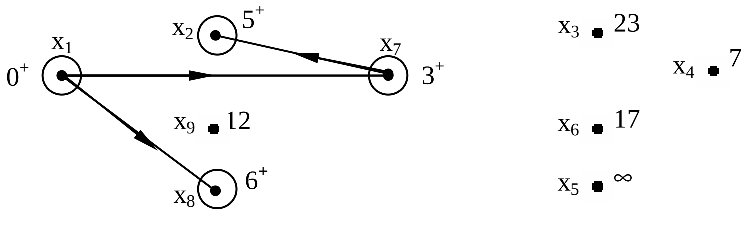


Рис. 2.41 – Пометки в начале четвертой итерации

Продолжая итерационный процесс, получим в итоге постоянные пометки для всех вершин графа (рис.2.42) и кратчайшие пути от вершины x_1 ко всем остальным вершинам. Эти пути выделены на рис. 2.42 жирными линиями.

Для нахождения кратчайшего пути между вершиной x_2 и начальной вершиной x_1, последовательно используем соотношение $l(x_i') + C(x_i', x_i) = l(x_i)$. Полагая i = 2 находим вершину x_2', непосредственно предшествующей x_2 в кратчайшем пути от x_1 к x_2:

$l(x_2') + C(x_2', x_2) = l(x_2) = 5$. Этому соотношению удовлетворяет вершина x_7. Следовательно, $x_2' = x_7$. Полагая i = 7 и применяя соотношение еще раз, получим $x_7' = x_1$. Поэтому кратчайший путь состоит из вершин x_1, x_7, x_2. Аналогичным образом находим все кратчайшие пути от x_1 к остальным вершинам.

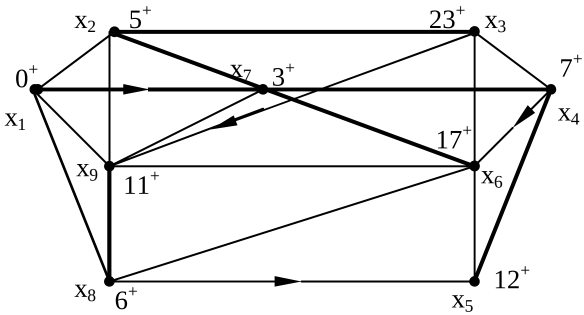


Рис.2.42 – Пометки и кратчайшие пути в графе

2.8 Обход графа

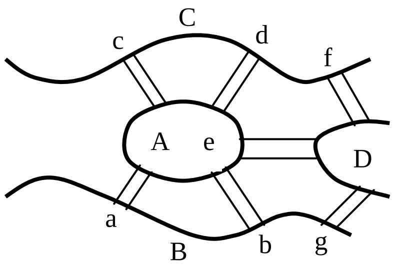
В теории графов есть понятие **обход графа.** Это маршрут, содержащий все ребра или вершины графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными обходами графа являются эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы.

2.8.1 Эйлеровы цепи, циклы, пути, контуры

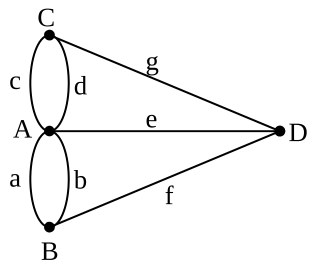
Эти понятия возникли в статье Эйлера в 1736 г., в которой он рассуждает о Кенигсбергских мостах. Известно, что Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах реки Преголи и островах на ней. Все части города соединены мостами. На рис. 2.43,а приведен план расположения семи мостов в Кенигсберге. Задача состоит в том, чтобы пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку С.

Так как существенны только переходы через мосты, то план города можно свести к изображению графа, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – различным разделенным частям города (рис. 2.43,б).

Поскольку в конце обхода нужно вернуться в исходную часть города, и на каждом мосту нужно побывать по одному разу, этот маршрут является простым циклом, содержащим все ребра графа. В дальнейшем такие циклы стали называть **эйлеровыми,** а графы, имеющие эйлеров цикл, – **эйлеровыми графами**.



а)



б)

Рис. 2.43 – Схема Кенигсбергских мостов и соответствующий граф

Эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги. Таким образом, эйлеровы графы – это графы, которые можно изобразить одним росчерком пера, причем процесс такого изображения начинается и заканчивается в одной и той же точке.

Обнаружив, что в данном графе не существует циклических обходов, проходящих по всем ребрам по одному разу, Эйлер обратился к общей задаче: при каких условиях в графе можно найти такой цикл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1 (Эйлера). Конечный связный неориентированный мультиграф является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют вершины нечетной степени.

Доказательство. Каждый раз, когда эйлеров цикл проходит через какую-либо вершину, он должен войти в нее по одному ребру, а выйти по другому. Поэтому условие отсутствия вершин нечетной степени в эйлеровом графе является ***необходимым.***

Для доказательства ***достаточности*** предположим, что все вершины графа имеют четные степени. Начнем цепь P в произвольной вершине x_i графа G (рис. 2.44,а), и будем продолжать ее, насколько возможно, все время через новые ребра. Так как в каждой вершине число ребер четно, этот процесс может закончиться только в x_i. Если цикл P содержит не все ребра графа G, то удалим из G часть, соответствующую циклу P.

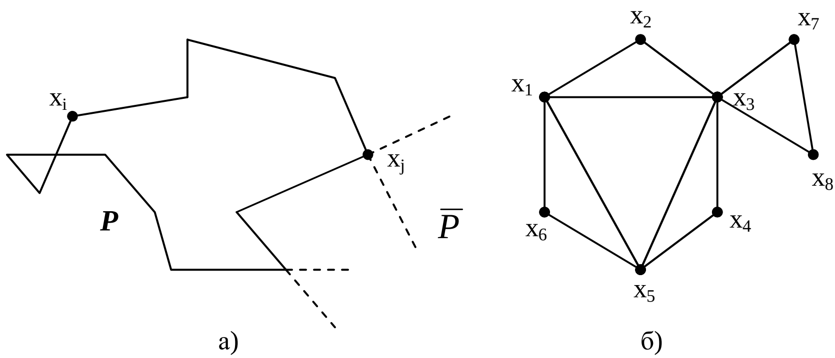


Рис. 2.44 – Иллюстрация доказательства теоремы Эйлера (а) и пример построения Эйлерова цикла (б)

Графы P и G имеют четные степени всех вершин. То же должно быть справедливо и для оставшегося графа $\overline{P}$.

Так как граф G связен, в цикле P должна найтись вершина x_j , инцидентная также ребрам $\overline{P}$. Из x_j можно построить новую цепь P′, содержащую только ребра из $\overline{P}$. И снова такая цепь может закончиться только при возвращении в x_j . Но тогда из P и P′ можно составить новый цикл

$$P_1 = P(x_i\ , x_j) \cup P' \cup P(x_j, x_i),$$

который возвращается в x_i и содержит больше ребер, чем P. Если P_1 не является эйлеровым циклом, то построение повторяется. По окончании построения получим эйлеров цикл. ■

Процесс построения эйлерова цикла иллюстрирует рис. 2. 44, б. Объединяя, например, циклы $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1\}$ и $\{x_3, x_7, x_8, x_3, x_5, x_1, x_3\}$, получим эйлеров цикл $\{ x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_3, x_5, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1\}$.

Как граф с эйлеровым циклом можно рассмотреть схему обхода выставки по различным коридорам, которую посетители должны пройти согласно указателям так, чтобы увидеть каждый экспонат по одному разу.

Эйлеровой цепью называется цепь, включающая все ребра данного конечного неориентированного графа G(X), но имеющая различные начало x_i и конец x_j. Чтобы в графе существовала эйлерова цепь, он должен быть связным и все вершины, кроме x_i и x_j должны иметь четные степени. Степени вершин x_i и x_j должны быть нечетными, что естественно, так как из x_i мы лишний раз выходим, а в x_j мы лишний раз входим. Эти условия являются **достаточными для существования эйлеровой цепи.**

Важен также следующий вопрос: каково **наименьшее количество не пересекающихся по ребрам цепей**, покрывающих конечный связный граф G(X) (покрыть – значит включить все ребра графа в цепь)? На этот вопрос отвечает теорема 2.

Теорема 2. В конечном связном неориентированном графе G(X) с k вершинами нечетной степени минимальное число непересекающихся по ребрам цепей, покрывающих G(X) равно k/2.

Доказательство. Пусть G(X) не является эйлеровым графом и k – число его вершин нечетной степени. Ранее было доказано, что k четно. Каждая вершина нечетной степени должна быть концом хотя бы одной из покрывающих граф цепей. Следовательно, число таких цепей не меньше, чем k/2. Но можно показать, что и не больше. Соединим попарно вершины нечетной степени k/2 ребрами. Тогда степень каждой вершины увеличиться на единицу и станет четной. Получится эйлеров граф, в котором существует эйлеров цикл. Теперь будем постепенно выбрасывать присоединенные ребра. При выбрасывании первого ребра эйлеров цикл превратится в эйлерову цепь, а при выбрасывании каждого последующего ребра одна из возникших к этому моменту цепей разобьется на две части. Таким образом, общее число этих цепей равно k/2. ■

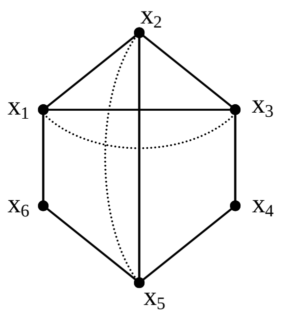


Рис. 2.45 – Пример построения покрывающих цепей

В качестве примера рассмотрим граф на рис.2.45. В нем x_1, x_2, x_3, x_5 – вершины нечетной степени. Добавим два ребра: (x_2, x_5), (x_1, x_3) (штриховые линии). Получим эйлеров граф с эйлеровым циклом $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_2, x_5, x_6, x_1, x_3, x_1\}$. Убрав (x_3, x_1), получим эйлерову цепь. Убрав (x_2, x_5), получим 2 покрывающих цепи: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_2\}$ и $\{x_5, x_6, x_1, x_3\}$.

Из теоремы 2 следует, что если в связном неориентированном мультиграфе имеются две вершины нечетной степени x_i и x_j, то существует эйлерова цепь, начинающаяся в x_i и кончающаяся в x_j.

Если связный мультиграф G(X) имеет четыре вершины нечетной степени, то его можно нарисовать двумя росчерками. Если количество нечетных степеней равно k, то граф можно нарисовать k/2 росчерками.

Рассмотрим теперь случай конечного **ориентированного графа.** Чтобы в конечном ориентированном графе существовал эйлеров цикл (**контур**), необходимо и достаточно, чтобы полустепени исхода и захода вершин этого графа по входящим и исходящим дугам были равны:

$$m'(x_i) = m''(x_i),\ \forall\ x_i \in X.$$

Доказательство то же, что и для неориентированного графа.

Так как любому неориентированному графу соответствует ориентированный, в котором каждое ребро заменено двумя дугами, инцидентными тем же вершинам и идущими в противоположном направлении, то отсюда следует, что **в конечном связном графе всегда можно построить ориентированный цикл, проходящий через каждое ребро по одному разу в каждом из двух направлений.** Такой цикл называется **способом обхода всех ребер графа.** Он используется во многих прикладных задачах, связанных с графами.

2.8.2 Гамильтоновы цепи, циклы, пути, контуры

Гамильтоновой цепью в неориентированном графе называется цепь, проходящая через каждую его вершину один и только один раз.

Гамильтоновым циклом в неориентированном графе называется цикл, проходящий через каждую вершину один и только один раз за исключением начальной вершины, которая совпадает с конечной.

Гамильтоновым путем в ориентированном графе называется путь $S(x_1, \ldots, x_n)$, проходящий через все вершины графа, притом только по одному разу.

Гамильтоновым контуром называется контур $M(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0)$ в ориентированном графе $G(X)$, если он проходит через все вершины графа, притом только по одному разу.

Существует следующая распространенная интерпретация задачи о гамильтоновых циклах. Обед накрыт на круглом столе. Среди гостей некоторые являются друзьями. При каких условиях можно рассадить всех так, чтобы по обе стороны от каждого из присутствующих сидели его друзья?

В применении графов к играм вершины соответствуют различным позициям. Существование гамильтонова цикла равносильно существованию циклической последовательности ходов, содержащей каждую позицию по одному разу. Примером является известная задача о шахматном коне: можно ли, начиная с произвольного поля на доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы пройти каждое из шестидесяти четырех полей и вернуться в исходное?

К гамильтоновым циклам относится также известная задача о бродячем торговце (задача о коммивояжере). Район, который должен посетить коммивояжер, содержит определенное количество городов. Расстояния между ними известны, и нужно найти кратчайшую дорогу, проходящую через все пункты и возвращающуюся в исходный. Эта задача имеет ряд приложений в экономике и исследовании операций.

Сформулирован целый ряд достаточных условий существования гамильтоновых цепей, циклов, путей и контуров. Приведем некоторые из них без доказательства.

1. Теорема Кёнига. В полном конечном графе всегда существует гамильтонов путь.

2. Если в графе G(X) с n вершинами для любой пары вершин x_i и x_j справедливо неравенство

$$m(x_i) + m(x_j) \geq n - 1,$$

где $m(x_i)$, $m(x_j)$ – степени вершин x_i и x_j, то граф G(X) имеет гамильтонову цепь.

Несмотря на сходство в определении эйлерова и гамильтонового циклов, соответствующие теории для этих понятий имеют мало общего. Критерий существования для эйлеровых циклов был установлен просто, для гамильтоновых циклов никакого общего правила неизвестно. Более того, иногда даже для конкретных графов бывает трудно решить, можно ли найти такой цикл. В принципе, поскольку речь идет о конечном числе вершин, задачу можно решить перебором, однако эффективного алгоритма неизвестно. Имеются некоторые частные схемы для отдельных случаев. Один довольно большой пример определения кратчайшей воздушной линии, соединяющей все столицы штатов в США, просчитали Данциг, Джонсон, и Фалкерсон.

2.9 Характеристики графов

Решение многих технических задач методами теории графов сводится к определению тех или иных характеристик графов, поэтому полезно знакомство со следующими характеристиками.

Цикломатическое число. Пусть G(X) – неориентированный граф, имеющий n вершин, m ребер и r компонент связности. Цикломатическим числом графа G называется число $\nu(G) = m - n + r$.

Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу независимых циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическим числом можно пользоваться для определения числа независимых контуров.

Хроматическое число. Пусть p – натуральное число. Граф G(X) называется p-хроматическим, если его вершины можно раскрасить различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково. Наименьшее число p, при котором граф является p-хроматическим, называется хроматическим числом графа и обозначается **γ(G).** Если $\gamma(G) = 2$, то граф называется

бихроматическим. Необходимым и достаточным условием того, чтобы граф был бихроматическим, является отсутствие в нем циклов нечетной длины.

Хроматическое число играет важную роль при решении задачи наиболее экономичного использования ячеек памяти при программировании. Однако его определение, за исключением $\gamma(G) = 2$, представляет собой довольно трудную задачу, требующую применения ЭВМ.

Множество внутренней устойчивости. Множество $S \subseteq X$ графа $G(X)$ называется внутренне устойчивым, если никакие две вершины из S не являются смежными, то есть для любого $x \in S$ имеет место

$G(x) \cap S = \varnothing$.

Множество внутренней устойчивости, содержащее наибольшее число элементов, называется **наибольшим** внутренне устойчивым множеством, а число элементов этого множества называется **числом внутренней устойчивости** графа G. Наибольшее внутренне устойчивое множество играет важную роль в теории связи.

Множество внешней устойчивости. Множество $T \subset X$ графа $G(X)$ называется внешне устойчивым, если любая вершина, не принадлежащая T, соединена дугами с вершинами из T, то есть для любого $x \notin T$ имеет место $G(x) \cap T \neq \varnothing$.

Множество внешней устойчивости, содержащее наименьшее число элементов, называется **наименьшим** внешне устойчивым множеством, а число элементов этого множества называется **числом внешней устойчивости** графа $G(X)$.

2.10 Задачи и упражнения

1. Покажите, что два графа на рис.2.46 изоморфны.

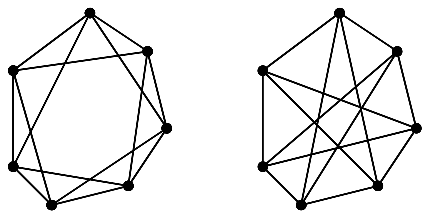


Рис. 2.46 – К задаче 1

2. «Три дома и три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?
3. Найдите число частичных графов конечного графа с m ребрами.
4. Каково число ребер в полном неориентированном графе с n вершинами?
5. Пусть U – множество положительных целых чисел, на котором задано отношение «a есть делитель b». Постройте граф этого отношения для множества целых чисел от 1 до 20.

На рис.2.47 задан граф отношения «быть сестрой» на множестве студентов-родственников нашего факультета. Постройте по рис.2.47 граф отношения «быть братом».

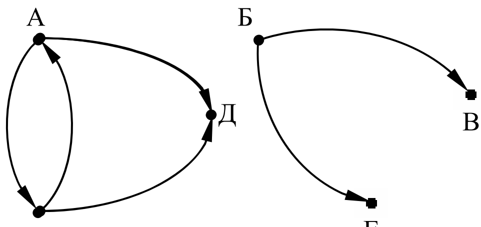


Рис. 2.47 – К задаче 6

6. Постройте графы отношений для задач №№ 11 – 17 главы 1.
7. Постройте матрицы смежности и инциденций для правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра. Найдите для каждого из них число внутренней устойчивости, число внешней устойчивости, центр, периферийные вершины, радиус, диаметр.
8. Для графа, изображенного на рис.2.48 найдите:
   а) матрицу смежности (вершин);
   б) матрицу инциденций;
   в) наибольшее внутренне устойчивое множество;
   г) наименьшее внешне устойчивое множество;
   д) матрицу отклонений;
   е) вектор отклоненностей;
   ж) центр и радиус графа.

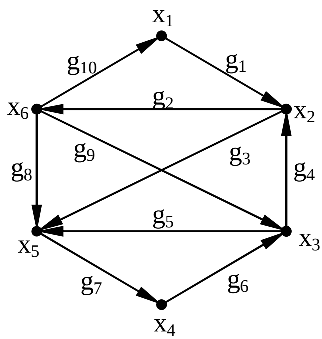


Рис. 2.48 – К задаче 9

10. Постройте графы, для которых радиус r равен 2, 3, и такие графы, для которых диаметр d равен 2, 3.
11. Определите, какие из графов трех пра-

вильных многогранников (тетраэдр, куб, откаэдр) имеют эйлеровы циклы. В тех случаях, когда эйлерова цикла нет, определите, сколько требуется цепей, чтобы покрыть все ребра.

12. Какие из графов правильных многогранников имеют гамильтоновы цепи и циклы?

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

3.1 Алгебра высказываний

Изучение математической логики мы начнём с изучения алгебры высказываний, на которой базируются другие логические исчисления (логика предикатов, вероятностная логика и т. д.). Алгебра высказываний представляет и самостоятельный интерес, как основа для построения моделей, описывающих некоторые дискретные устройства.

Под **высказыванием** понимается повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, но не то и другое вместе.

Примеры. 1. Волга впадает в Каспийское море.
2. Два больше трёх.
3. Я лгу.

Примеры 1, 2 являются высказываниями (1 – истинно, 2 – ложно). 3 – не высказывание (если предположить, что оно истинно, то в силу его смысла оно одновременно ложно и, наоборот, из ложности этого предложения вытекает его истинность).

В алгебре высказываний не рассматривают внутреннюю структуру высказываний, а ограничиваются рассмотрением их свойства представлять истину или ложь. Поэтому на высказывание можно смотреть, как на величину, которая может принимать только одно из двух значений «истина» или «ложь».

Высказывания будем обозначать буквами A, B, C,..., а их значения, то есть истину или ложь, соответственно цифрами 1 или 0.

В обычной речи сложные предложения образуются из простых с помощью связок: «и», «или», «если…, то» и др.

Примеры. 1. Светит солнце, **и** идёт дождь.
2. Шесть делится на два **или** шесть делится на три.
3. **Если** контакт замкнут, **то** лампа горит.

Связки можно рассматривать как операции над высказываниями. В обычной речи не всегда удаётся однозначно определить истинность или ложность сложного высказывания по истинности или ложности его составных частей. В алгебре высказываний вводят операции, аналогичные связкам обычной речи, причём истинность или ложность сложного высказывания **полностью** определяется истинностью или ложностью его составляющих.

Пусть даны два произвольных высказывания А и В.

1. Выражение $A \wedge B$ (читается: «А и В») означает высказывание, истинное только в том случае, когда А и В истинны. Такое высказывание называют **конъюнкцией высказываний** А и В. Символом $\wedge$ обозначают операцию **конъюнкции**. Эта операция соответствует союзу **«и»** в обычной речи. Однако в повседневной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далекие по содержанию. В алгебре же высказываний операция конъюнкции может быть применена к любым двум высказываниям. Так, например, для высказываний «пять больше трех» и «трава зеленая» их конъюнкция «пять больше трех и трава зеленая» является истинным высказыванием.

2. Выражение $A \vee B$ (читается: «А или В») означает высказывание, истинное, если хотя бы одно из высказываний А или В является истинным. Такое высказывание называют **дизъюнкцией высказываний** А и В. Символ $\vee$ обозначает операцию **дизъюнкции**. Эта операция соответствует союзу **или** обычной речи, применяемому в неисключающем смысле.

Дело в том, что в повседневной речи союз «или» может иметь два смысловых значения: неисключающее и исключающее. В первом случае подразумевается, что из двух высказываний, по крайней мере, одно истинно, а может быть и оба истинны. Примером является высказывание «В жаркую погоды пьют воду или едят мороженое». Во втором случае полагают, что из двух высказываний истинным является только одно («Сегодня мы поедем на экскурсию или пойдем на пляж»). Конъюнкция высказываний соответствует первому случаю.

3. Выражение $A \to B$ (читается: «если А, то В» или «А влечет В») означает высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В ложно. Такое высказывание называют **импликацией высказываний** А и В. Высказывание А называется **услови-**

ем или посылкой, высказывание В – **заключением** или следствием импликации. Символ $\to$ обозначает **операцию импликации.** В обычной речи операции импликации соответствует связка **если** ..., **то**. Отличие состоит в том, что связка предполагает смысловую зависимость соединяемых высказываний, а для операции $\to$ смысловая связь несущественна. Так, например, высказывания «если $2*2 = 5$, то трава синяя» и «если два больше трех, то восемь делится на четыре» являются истинными, так как у первого из них ложная посылка, а у второго – истинное следствие. Импликация «если $2*2 = 4$, то $5<2$» ложна, поскольку ее условие истинно, а заключение ложно.

4. Выражение А ~ В (читается: «А эквивалентно В», «для того, чтобы А, необходимо и достаточно, чтобы В», «А тогда и только тогда, когда В», «А равносильно В») означает высказывание, которое истинно тогда и только тогда А и В оба истинны или оба ложны. Такое высказывание называют **эквивалентностью высказываний** А и В. Символ ~ означает операцию **эквивалентности.** В обычной речи этой операции соответствует связка **тогда и только тогда, когда**. Примером эквивалентности может служить высказывание «Треугольник АВС равнобедренный тогда и только тогда, когда угол при вершине В равен углу при вершине С».

5. Выражение $\overline{A}$ (читается: «не А») означает высказывание, которое истинно, когда А ложно и ложно, когда А истинно. Такое высказывание называют **отрицанием высказывания** А. Символ $\overline{}$ над буквой обозначает операцию **отрицания**. В обычной речи этой операции соответствует частица **не**. Например, для истинного высказывания «восемь делится на четыре» отрицанием является ложное высказывание «неверно, что восемь делится на четыре» или «восемь не делится на четыре».

Если А, В, С – произвольные высказывания, которые рассматриваются как величины, принимающие одно из двух значений 1 или 0, то, применяя к ним операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания, можно получить новые сложные высказывания, например:

$$((A \lor B) \land \overline{C}) \to \overline{A \to B}. \qquad (3)$$

В обычной речи не всегда удается однозначно определить истинность или ложность сложного высказывания по истинности или ложности его составных частей. В алгебре высказываний значение сложного высказывания **полностью** определяется значениями его составляющих. Предположим, что А – ложное высказывание, В – истинное, С – ложное. Тогда высказывание (3) является ложным в силу определения логических операций.

Наряду с высказываниями, принимающими определенные и постоянные значения 1, 0 и называемыми **определенными высказываниями,** в алгебре высказываний рассматривают **переменные высказывания**, которые не имеют определённого значения. Если X, Y, Z – переменные высказывания, то, применяя к ним операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания, можно получить формулы алгебры высказываний. При задании значений переменных высказываний формула принимает определенное значение. Таким образом, каждая формула определяет некоторую функцию, переменными которой являются переменные высказывания. Переменные и функции принимают только два значения: истина или ложь, поэтому функции можно описать конечной таблицей, которую называют **истинностной таблицей** или **таблицей истинности** данной формулы.

Приведём истинностную таблицу формул $X \land Y$, $X \lor Y$, $X \to Y$,
$X \sim Y$, $\overline{X}$ (табл.3.1).

Таблица 3.1 – Истинностная таблица для операций над высказываниями

X	Y	$X \land Y$	$X \lor Y$	$X \to Y$	$X \sim Y$	$\overline{X}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Возможен случай, когда две формулы имеют одну и ту же истинностную таблицу. Такие формулы называют **равносильными**. При этом количество и состав переменных в формулах не обязательно должны совпадать. Так, например, равносильными являются формулы $\overline{Y} \lor Z$ и
$((X \lor Y) \land \overline{Z}) \to \overline{(X \to Y)}$ (табл. 3.2).

Запись формул можно упростить, опуская некоторые скобки и считая, что если их нет, то выполнять операции нужно в следующем порядке:

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция;
4) импликация;
5) эквивалентность.

Например, формулу $X \wedge Y \vee Z$ следует понимать как $(X \wedge Y) \vee Z$.

Таблица 3.2 – Истинностная таблица для равносильных формул

X	Y	Z	$\overline{Y} \vee Z$	$((X \vee Y) \wedge \overline{Z}) \to (\overline{X \to Y})$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Если все значения формулы в истинностной таблице равны 1, то формула называется тождественно истинной или **тавтологией**. Тавтологии называют также законами логики. В обычном языке рассуждение имеет импликативную форму «если то-то и то-то, то то-то и то-то». При этом заботятся не об истинности или ложности посылок и заключений, а о правильности рассуждений. Рассуждения должны быть правильными, то есть соответствующие им импликации должны быть тождественно истинными. С этой точки зрения задачей логики можно считать исследование тавтологий. Тавтологичность формулы можно всегда обнаружить с помощью таблиц истинности.

3.2 Булевы функции

Функция $f(x_1, x_2,..., x_n)$, принимающая два значения: 0 и 1 и зависящая от переменных, каждая из которых может принимать значения 0 и 1, называется **булевой** или **переключательной**. Из определения следует, что область определения булевой функции – совокупность всевозможных n-мерных наборов из нулей и единиц, а для её задания достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов (табл. 3.3).

Таблица 3.3 – Задание булевой функции

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2,...,x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0,...,0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0,...,0, 1)$
...	...	...	...	...	....
1	1	...	1	0	$f(1, 1,...,1, 0)$
1	1	...	1	1	$f(1, 1,...1, 1)$

Порядок расположения наборов, принятый в таблице, называется **стандартным** или **естественным**. При таком порядке каждому набору

$\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, где α_i есть 0 или 1, ставится в соответствие число

$$N = \alpha_1 2^{n-1} + ... + \alpha_{n-1} 2 + \alpha_n .$$

Наборам (0, 0,...,0, 0), (0, 0,...,0, 1),..., (1, 1,...,1, 1) соответствуют числа 0, 1,..., 2^n-1. Естественным порядком будет расположение наборов в порядке возрастания соответствующих им чисел. Десятичное число, соответствующее входному набору, является его номером. Поэтому очевидно, что количество k входных наборов для булевой функции n переменных равно $k=2^n$. Количество же различных функций n переменных можно определить из следующих соображений. Каждая функция задается набором своих k значений (для k входных наборов), которому также можно поставить в соответствие k-разрядное двоичное число. Располагая теперь в таблице функции в порядке возрастания соответствующих им чисел, мы получим все возможные различные функции. Количество таких функций будет равно $2^k = 2^{2^n}$.

Рассмотрим другие способы задания булевых функций. Сначала познакомимся с функциями одной и двух переменных, которые часто употребляются в математической логике и кибернетике, их можно считать «элементарными» функциями (табл. 3.4, 3.5).

Таблица 3.4 – Булевы функции одной переменной

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$g_1(x)$, $g_4(x)$ – константы 0 и 1,
$g_2(x) = x$,
$g_3(x) = \overline{x}$ (отрицание x).

Таблица 3.5 – Булевы функции двух переменных

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Следует отметить, что к функциям двух переменных относятся и такие, которые в действительности зависят от одной переменной или не зависят ни от одной.

Функции f_1, f_{16} – константы 0 и 1. Они не зависят существенно ни от одной переменной.

Функции $f_4 = x_1$, $f_{11} = \overline{x_2}$, $f_6 = x_2$, $f_{13} = \overline{x_1}$ зависят существенно только от одной переменной.

$f_2 = x_1 \wedge x_2$ – **конъюнкция** или логическое умножение (знак «$\wedge$» можно заменять на «·», либо опускать).

$f_8 = x_1 \vee x_2$ – **дизъюнкция** или логическое сложение.

f_{10} – **эквивалентность**, $x_1 \sim x_2$.

$f_7 = x_1 \oplus x_2$ или $x_1 + x_2 \pmod 2$ – **сложение по модулю два**.

f_{12}, f_{14} – **импликация**, $x_2 \to x_1$ и $x_1 \to x_2$.

f_{15} – **штрих Шеффера**, $x_1 \mid x_2$.

f_9 – **стрелка Пирса,** $x_1 \downarrow x_2$ (другое название – функция Вебба).

f_3, f_5 – **функции запрета** x_1 и x_2 соответственно. $f_3 = \overline{x_1 \to x_2}$, $f_5 = \overline{x_2 \to x_1}$.

Исходя из элементарных функций можно строить формулы, т.е. рассматривать функции от функций например, $(x_1 \oplus x_2)\ \overline{x_2}) \to x_3$.

Некоторые свойства элементарных функций

1. Функции конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю 2 обладают свойством ассоциативности, что позволяет опускать скобки и использовать следующие обозначения:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1\, x_2 \dots x_n\,, \qquad\qquad \bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n\,,$$

2. $\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$, $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1}\ \overline{x_2}$ – закон де Моргана,

$\overline{\overline{x}} = x$ – закон двойного отрицания.

3. $x\,x = x$, $x \vee x = x$, $x\ \overline{x} = 0$, $x \vee \overline{x} = 1$,

$x\,0 = 0$, $x\,1 = x$, $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$.

Свойства можно проверить по таблице булевых функций (табл. 3.5).

3.3 Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Рассмотрим возможность представления произвольной булевой функции в виде формулы из элементарных функций. Так, теоремы 1 и 2 доказывают возможность такого представления в виде формулы, содержащей только функции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Теорема 1. Произвольную булеву функцию $f\,(x_1,x_2...,x_n)$ можно представить в виде

$$f\,(x_1,x_2...,x_n) = \bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} f\,(\sigma_1,\sigma_2...,\sigma_n)\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}\,, \qquad (4)$$

где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $x_i^0 = \overline{x_i}$, $x_i^1 = x_i$, $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$ и дизъюнкция берётся по всем n-мерным наборам из нулей и единиц.

Доказательство. Покажем, что левая и правая части соотношения (4) совпадают. Произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$, где каждое $\alpha_i \in \{0,1\}$, подставим в соотношение (4). В левой части получим $f\,(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n)$, а в правой части

$$\bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\, \alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}...\alpha_n^{\sigma_n} = f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\, \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_n^{\alpha_n} =$$

$$= f\,(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\,.$$

Равенства в правой части вытекают из свойств конъюнкции, дизъюнкции и из того, что $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$. ■

Если $f(x_1, x_2,...,x_n) \not\equiv 0$, то соотношение (4) можно переписать в форме

$$f(x_1, x_2...,x_n) = \bigvee_{\substack{\text{по всем } \sigma \\ f(\sigma)=1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (5)$$

Эта форма называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (совершенной ДНФ) функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Построение совершенной ДНФ из табличного задания функции производится следующим образом. Для каждого набора $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$ такого, что $f(\sigma_1,...,\sigma_n) = 1$, составляется выражение $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ и затем все такие конъюнкции соединяются знаком дизъюнкции. Например, для функции сложения по модулю два совершенная ДНФ имеет вид

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 .$$

Теорема 2. Произвольную булеву функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$ можно представить в виде

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \bigwedge_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} (f(\sigma_1,\sigma_2...,\sigma_n) \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_1} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}), \ (6)$$

где $\sigma_i = \{0,1\}$, $x_i^0 = \bar{x}_i$, $x_i^1 = x_i$, $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$ и конъюнкция берётся по всем n-мерным наборам из нулей и единиц.

Доказательство. Из свойства булевой функции (закон двойного отрицания) имеем $f(x_1,...,x_n) = \bar{\bar{f}}(x_1,...,x_n)$.

Для функции $\bar{f}(x_1,...,x_n)$ по теореме 1 существует представление в виде

$$\bar{f}(x_1,x_2,...,x_n) = \bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} \bar{f}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}, \text{ тогда}$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \overline{\bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} \bar{f}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}} =$$

$$= \bigwedge_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} (f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) \vee \overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee ... \vee \overline{x_n^{\sigma_n}}), \text{ что следует из}$$

закона де Моргана. Заметим также, что $\overline{x_i^{\sigma_i}} = x_i^{\overline{\sigma_i}}$. Следовательно,

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \bigwedge_{\sigma=(0,\dots,0)}^{\sigma=(1,\dots,1)} \left(f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n) \vee x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee\dots\vee x_n^{\overline{\sigma_n}}\right). \quad \blacksquare$$

Если $f(x_1,x_2,\dots,x_n) \not\equiv 1$, то соотношение (6) можно переписать в форме

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \bigwedge_{\substack{\text{по всем } \sigma,\\ f(\sigma)=0}} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee\dots\vee x_n^{\overline{\sigma_n}}\right). \qquad (7)$$

Эта форма называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (совершенной КНФ) функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Построим совершенную КНФ функции $x_1 \oplus x_2$ (табл. 3.5):

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$$

Вывод. Булеву функцию любого числа переменных можно построить из функций одной или двух переменных. Средством такого построения является суперпозиция булевых функций, то есть подстановка одних булевых функций вместо переменных в другие булевы функции.

3.4 Полнота системы булевых функций

Система булевых функций $\{f_1(x_{11},\dots,x_{1p1}),\dots,f_s(x_{s1},\dots,x_{sps}),\dots\}$ называется **полной**, если для любой булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ можно построить равную её функцию, представляющую собой результат суперпозиции функций $\{f_1,\dots,f_s,\dots\}$ и $x_1,\dots,x_n$.

Примеры полных систем булевых функций.

1. x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$. Полнота следует из того, что для каждой функции можно построить совершенные ДНФ и КНФ.
2. x_1x_2, $\bar{x}_1$. Полнота следует из п.1 и равенства $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1\,\bar{x}_2}$.
3. $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$. Полнота следует из п.1 и равенства $x_1x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$.
4. x_1x_2, $x_1 \oplus x_2$, 1. Полна, так как $\bar{x}_1 = x_1 \oplus 1$, а система x_1x_2, $\bar{x}_1$ является полной (п.2).

Теорема 3. Любую булеву функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ можно представить в виде полинома

$f(x_1,x_2,...,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus ... \oplus a_{2^n-1}x_1 \dots x_n$,
где $a_i \in \{0,1\}$, $i = 0, 1,...,2^n$-1.

Доказательство. Система функций x_1x_2, $x_1 \oplus x_2$, 1, 0 полна. Пользуясь правилами

$A \oplus A = 0, \quad A \cdot A = A, \quad A \oplus 0 = A,$

$A \cdot 0 = 0, \quad A \cdot 1 = A, \quad A \cdot B = B \cdot A,$

$A \oplus B = B \oplus A, \quad (A \oplus B) \cdot C = A \cdot C \oplus B \cdot C,$

которые легко проверить, получим представление функции в виде полинома по модулю 2. ■

Легко показать, что представление функции в виде полинома по модулю два является единственным.

Как обнаружить полноту или неполноту булевых функций? Для решения этого вопроса познакомимся с пятью классами булевых функций.

Класс функций, сохраняющих ноль

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **сохраняющей ноль**, если она на наборе из нулей принимает значение 0, т.е. $f(0,...,0) = 0$.

Так, функции x_1x_2 , $x_1 \vee x_2$, x, 0 – сохраняют ноль, функции $x_1 \rightarrow x_2$, $\bar{x}$, 1 – не сохраняют.

Лемма 1. Из функций, сохраняющих ноль, суперпозицией можно получить только функции, сохраняющие ноль.

Доказательство. Поскольку функции, равные переменным, сохраняют ноль, достаточно показать, что функция

$\Phi(x_1,...,x_n) = f(f_1(x_1,...,x_n),..., f_m(x_1,...,x_n))$

сохраняет ноль, если функции f, $f_1,...,f_m$ сохраняют ноль. Последнее следует из

$f(f_1(0,...,0),... f_m(0,...,0)) = f(0,...,0) = 0.$ ■

Следствие. Полная система булевых функций должна содержать хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль.

Класс функций, сохраняющих единицу

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **сохраняющей единицу**, если она на наборе из единиц принимает значение 1, то есть $f(1,..,1) = 1$.

Так, функции x_1x_2 , $x_1 \vee x_2$, x, 1 – сохраняют единицу, функции $x_1 \oplus x_2$, $\bar{x}$, 0 – не сохраняют.

Лемма 2. Из функций, сохраняющих единицу, суперпозицией можно получить только функции, сохраняющие единицу.

Доказательство очевидно.

Следствие. Полная система булевых функций должна содержать хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу.

Класс самодвойственных функций

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **самодвойственной**, если $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Например, x, $\overline{x}$ – самодвойственные функции, x_1x_2, $x_1 \vee x_2$ - несамодвойственные.

Лемма 3. Из самодвойственных функций путём суперпозиции можно получить только самодвойственные функции.

Доказательство. Пусть $f(y_1, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ – самодвойственные функции. Надо показать, что

$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ – самодвойственная.

Из цепочки равенств

$$\overline{\Phi}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \overline{f}(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) =$$
$$= \overline{f}(\overline{f}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \overline{f}_m(x_1, \ldots, x_n)) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) =$$
$$= \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$ следует, что $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ – самодвойственна. ■

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну несамодвойственную функцию.

Лемма 4. Из несамодвойственной функции подстановкой x и $\overline{x}$ можно получить константу.

Доказательство. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ несамодвойственная, поэтому найдется набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$. По набору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ определяются вспомогательные функции

$\varphi_i(x)$ $(i = 1,2\ldots,n)$,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ \overline{x}, & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Функция $\varphi_i(x)$ обладает свойством $\varphi_i(0) = \alpha_i$, $\varphi_i(1) = \overline{\alpha}_i$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Она получена из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой x и $\overline{x}$. Функция $\varphi(x)$ – константа, так как $\varphi(0) = f(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0)) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) =$
$= f(\varphi_1(1), \ldots, \varphi_n(1)) = \varphi(1)$. ■

Класс монотонных функций

Набор $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ **предшествует** набору $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$, если $\alpha_i \le \beta_i$ (i=1,2,...,n). Этот факт обозначаем как $\alpha \preccurlyeq \beta$. Наборы, которые находятся в отношении $\preccurlyeq$, называются **сравнимыми**.

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **монотонной**, если для любой пары наборов $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ таких, что $\alpha \preccurlyeq \beta$, $f(\alpha) \le f(\beta)$.

Например, функции x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, x – монотонные, а $\overline{x}$ – немонотонная.

Лемма 5. Из монотонных функций с помощью суперпозиции можно получить только монотонные функции.

Доказательство. Пусть функции $f(y_1,...,y_m)$, $f_1(x_1,...,x_n),...,$ $f_m(x_1,...,x_n)$ –монотонные. Надо показать, что

$\Phi(x_1,...,x_n) = f(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))$ – монотонная функция.

Пусть $\alpha \preccurlyeq \beta$, тогда $f_i(\alpha) \le f_i(\beta)$ (i=1,...,m). Отсюда

$$\Phi(\alpha) = f(f_1(\alpha),...,f_m(\alpha)) \le f(f_1(\beta),...,f_m(\beta)) = \Phi(\beta). \qquad \blacksquare$$

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну немонотонную функцию.

Лемма 6. Из немонотонной функции путём подстановки констант 0, 1 и функции x можно получить $\overline{x}$.

Доказательство. Пусть дана немонотонная функция $f(x_1,...,x_n)$, т.е. для неё существуют наборы $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ такие, что $\alpha \preccurlyeq \beta$, а $f(\alpha) > f(\beta)$. Рассмотрим функцию $\psi(x)$, которая получается из функции $f(x_1,...,x_n)$ подстановкой констант 0, 1 и функции x. Подстановку определим следующим образом: вместо x_i будем подставлять α_i, если $\alpha_i = \beta_i$, и x, если $\alpha_i \ne \beta_i$. Рассмотрим функцию $\psi(x)$.

$\psi(0) = f(\alpha_1,...,\alpha_n) \underline{>} f(\beta_1,...,\beta_n) = \psi(1)$.

Следовательно, $\psi(x) = \overline{x}$. $\blacksquare$

Класс линейных функций

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **линейной**, если полином этой функции имеет вид

$f(x_1,...,x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n$, где $a_i \in \{0,1\}$ (i=0,1,...,n).

Например: x, $\bar{x}$ – линейны, x_1x_2 – нелинейна.

Лемма 7. Из линейных функций суперпозицией можно получить только линейные функции.

Доказательство очевидно.

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну нелинейную функцию.

Лемма 8. Из нелинейной функции $f(x_1,...,x_n)$, констант 0, 1 и функций x, $\bar{x}$, y суперпозицией можно получить конъюнкцию двух переменных xy.

Доказательство. Так как функция $f(x_1,...,x_n)$ нелинейна, её полином по модулю 2 содержит хотя бы один член с конъюнкцией двух переменных x_i и x_j. Члены полинома, представляющего функцию $f(x_1,...,x_n)$ можно перегруппировать следующим образом:

$$f(x_1,...,x_n) = x_i\, x_j\, f_1(x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...,x_{j-1}, x_{j+1},..., x_n) \oplus$$
$$\oplus\, x_i\, f_2(x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...,x_{j-1}, x_{j+1},..., x_n) \oplus$$
$$\oplus\, x_j\, f_3(x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...,x_{j-1}, x_{j+1},..., x_n) \oplus$$
$$\oplus\, f_4(x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_{j-1}, x_{j+1},..., x_n),$$

где функция $f_1(x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_{j-1}, x_{j+1},..., x_n) \not\equiv 0$, т.е. существует набор $(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1},..., \alpha_n)$ такой, что

$$f(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1},..., \alpha_n) = 1.$$

Подставляя этот набор в $f(x_1,...,x_n)$, получим функцию $\chi(x_i, x_j)$:

$$\chi(x_i, x_j) = f(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1},..., \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1},..., \alpha_n) = x_ix_j \oplus \alpha x_i \oplus \beta x_j \oplus \gamma,$$

где

$$\alpha = f_2(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1},..., \alpha_n),$$
$$\beta = f_3(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1},..., \alpha_n),$$
$$\gamma = f_4(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1},..., \alpha_n).$$

Рассмотрим функцию $F(x, y) = \chi(x \oplus \beta, \underline{y \oplus \alpha}) = xy \oplus \alpha\beta \oplus \gamma$.

Она получена суперпозицией $\chi(x_i, x_j)$, x, y и $\bar{x}$ ($\bar{x} = x \oplus 1$).

Если $\alpha\beta \oplus \gamma = 0$, то $F(x, y) = xy$,

а если $\alpha\beta \oplus \gamma = 1$, то $\overline{F}(x, y) = xy$. ■

Критерий полноты системы булевых функций дает теорема 4 (приведем ее без доказательства).

Теорема 4 (о полноте). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1(x_{11},..., x_{1p1}),..., f_s(x_{s1},..., x_{sps}),\dots\}$ была полна, необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию, не сохраняющую 0; функцию, не сохраняющую 1; несамодвойственную функцию; немонотонную функцию; нелинейную функцию.

Теперь мы можем составить таблицу, отражающую принадлежность каждой из функций двух переменных к рассмотренным классам функций
(табл. 3.6).

Таблица 3.6 – Свойства функций двух переменных

Обозначение функции	Наименование функции	Свойства функции				
		Сохраняющая 0	Сохраняющая 1	Самодвойственность	Монотонность	Линейность
$f_1 = 0$	Нулевая функция	+	-	-	+	+
$f_2 = x_1\ x_2$	Конъюнкция	+	+	-	+	-
$f_3 = \overline{x_1 \to x_2}$	Запрет x_1					
$f_4 = x_1$	Повторение x_1					
$f_5 = \overline{x_2 \to x_1}$	Запрет x_2					
$f_6 = x_2$	Повторение x_2					
$f_7 = x_1 \oplus x_2$	Сложение по |2|					
$f_8 = x_1 \vee x_2$	Дизъюнкция					
$f_9 = x_1 \downarrow x_2$	Стрелка Пирса					
$f_{10} = x_1 \sim x_2$	Эквивалентность					
$f_{11} = \overline{x_2}$	Отрицание x_2					
$f_{12} = x_2 \to x_1$	Импликация x_2 в x_1					
$f_{13} = \overline{x_1}$	Отрицание x_1					
$f_{14} = x_1 \to x_2$	Импликация x_1 в x_2					
$f_{15} = x_1 \mid x_2$	Штрих Шеффера					
$f_{16} = 1$	Единичная функция					

Эта таблица весьма полезна при выявлении полных систем булевых функций. В ней заполнены только две первых строки. Оставшуюся часть таблицы заполните самостоятельно.

3.5 Минимизация дизъюнктивных нормальных форм

3.5.1 Основные определения

Теорема о полноте даёт ответ на вопрос, из какой системы функций можно получить в виде суперпозиции любую функцию. Но в практических задачах нужна не столько возможность, сколько правила, пользуясь которыми можно получить представление, оптимальное в некотором смысле. Каждое представление функции в виде суперпозиции можно охарактеризовать некоторым числом, которое называется **сложностью данного представления** (например, число применений операции суперпозиции) и зависит от конкретной задачи. Тогда можно поставить задачу об отыскании представления булевой функции наименьшей сложности. В принципе, такую задачу всегда можно решить последовательным перебором различных суперпозиций функций системы. Рассмотрим теперь суперпозиции над системой функций, содержащей лишь конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Именно для этих суперпозиций методы минимизации разработаны достаточно хорошо. Чтобы дать точную формулировку задачи, приведем некоторые определения.

Элементарной конъюнкцией U_i называется выражение

$U_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$, где все x_{i_j} (j = 1,…,r) – различны, а r – **ранг конъюнкции**. Единица считается конъюнкцией нулевого ранга.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция $N = U_1 \vee U_2 \vee \dots \vee U_k$ элементарных конъюнкций $U_1, U_2, \dots, U_k$. Совершенная ДНФ – частный случай ДНФ.

Минимальной ДНФ функции $f(x_1,\dots,x_n)$ называется ДНФ $N = U_1 \vee U_2 \vee \dots \vee U_k$, представляющая функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ и содержащая наименьшее количество букв по сравнению с другими ДНФ, то есть число букв в N равно $\min\sum_{i=1}^{k} r_i$, где r_i - ранг конъюнкции U_i, а минимизация проводится по всем ДНФ функции f $(x_1,...,x_n)$.

Тогда задача об отыскании представления булевой функции наименьшей сложности формулируется так: для всякой функции найти представление в виде минимальной ДНФ.

Прежде чем описать метод решения задачи дадим ещё несколько определений.

Импликантом функции f $(x_1,...,x_n)$ называется элементарная конъюнкция U_i = $x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_r}^{\sigma_r}$, если выполнено соотношение $U_i \to f(x_1,...,x_n) \equiv 1$. Это означает, что если на некотором наборе импликант U_i обращается в единицу, то функция $f(x_1,...,x_n)$ на этом наборе тоже обращается в единицу. Любая элементарная конъюнкция произвольной совершенной ДНФ является импликантом данной функции.

Простым импликантом функции f $(x_1,...,x_n)$ называется импликант функции f $(x_1,...,x_n)$, если элементарная конъюнкция, получающаяся из него удалением любой буквы, не является импликантом функции.

Сокращенной ДНФ функции f $(x_1,...,x_n)$ называется дизъюнкция всех простых импликантов функции f $(x_1,...,x_n)$.

Теорема 5 (без доказательства)**.** Сокращённая ДНФ представляет функцию f $(x_1,...,x_n)$.

Теорема 6 (без доказательства)**.** Минимальная ДНФ функции f $(x_1,...,x_n)$ получается из ее сокращённой ДНФ удалением некоторых элементарных конъюнкций.

3.5.2 Этапы минимизации ДНФ

В силу теоремы 6 получение минимальной ДНФ можно разбить на два этапа.

1. Нахождение сокращенной ДНФ.
2. Нахождение **тупиковых** ДНФ (таких, из которых нельзя удалить ни одного простого импликанта) путём удаления подмножества элементарных конъюнкций из сокращённой ДНФ. Выбор минимальной из полученных тупиковых ДНФ.

Рассмотрим **первый этап** получения минимальной ДНФ. Метод получения сокращённой ДНФ функции $f(x_1,\dots,x_n)$ из ее совершенной ДНФ состоит в последовательном применении двух равносильных преобразований:

1) **операции полного склеивания,** которая состоит в замене выражения $Ax \vee A\,\overline{x}$ на A, так как

$$Ax \vee A\,\overline{x} \equiv A\,(x \vee \overline{x}) \equiv A\cdot 1 \equiv A;$$

2) **операции неполного склеивания**, которая состоит в замене $Ax \vee A\,\overline{x}$ на $Ax \vee A\,\overline{x} \vee A$, так как

$$Ax \vee A\,\overline{x} \vee A \equiv A\,(x \vee \overline{x}) \vee A \equiv A \vee A = A\,;$$

3) **операции поглощения**, которая состоит в замене $AB \vee A$ на A, так как $AB \vee A \equiv A\,(B \vee 1) \equiv A$.

Здесь A и B – произвольные элементарные конъюнкции.

Теорема 7 (без доказательства)**.** Сокращённую ДНФ функции $f\,(x_1,\dots,x_n)$ можно получить из ее совершенной ДНФ, применяя все возможные операции неполного склеивания, а затем операции поглощения.

Пример 1. Построить сокращённую ДНФ функции $f\,(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$. Имеем

$$f\,(x_1, x_2) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_1 x_2 =$$
$$= x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2\,.$$

Теперь перейдем ко **второму этапу** получения минимальной ДНФ.

Пусть дана сокращённая ДНФ функции $f\ (x_1,\dots,x_n)$: $N = U_1 \vee U_2 \vee \dots \vee U_k$. Простой импликант называется **ядерным** (входящим в ядро функции $f\,(x_1,\dots,x_n)$), если

$$U_i \to \bigvee_{\substack{j=1\\ i \neq j}}^{k} U_j \not\equiv 1.$$

Эта запись означает, что простой импликант U_i является ядерным импликантом функции $f\ (x_1,\dots,x_n)$, если существует набор $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, на котором импликант U_i обращается в 1, а все остальные импликанты сокращённой ДНФ – в ноль.

Пример 2. Найти ядерные импликанты функции $f\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$, заданной своей сокращённой ДНФ

$$\overline{x}_2\,\overline{x}_4 \vee x_1\,\overline{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2x_3.$$

Простой импликант $\bar{x}_2\bar{x}_4$ является ядерным, так как на наборе (0,0,0,0) $\bar{x}_2\bar{x}_4 = 1$, а дизъюнкция оставшихся импликантов

$$x_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = 0.$$

Простой импликант $x_1\bar{x}_4$ – неядерный, так как он равен единице на наборах {1,0,0,0}, {1,0,1,0}, {1,1,0,0}, {1,1,1,0}, но на этих же наборах

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = 1,$$

следовательно

$$x_1\bar{x}_4 \to \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \equiv 1.$$

Простой импликант x_1x_2 – ядерный, так как на наборе {1,1,0,1} $x_1x_2 = 1$, а $\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = 0$.

Простой импликант $x_2x_3x_4$ – неядерный, так как на наборах {0,1,1,1}, {1,1,1,1}

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = 1.$$

Простой импликант $\bar{x}_1x_3x_4$ – неядерный, так как на наборах {0,0,1,1}, {0,1,1,1}

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = 1;$$

Простой импликант $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ – неядерный, так как на наборах {0,0,1,0}, {0,0,1,1}

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 = 1.$$

Теорема 8 (без доказательства)**.** Простой импликант U_i входит во все тупиковые ДНФ тогда и только тогда, когда U_i входит в ядро функции $f(x_1,...,x_n)$, то есть тогда и только тогда, когда он является ядерным.

Следствие. Пусть ядро $f(x_1,...,x_n)$ состоит из импликантов

$U\ell_1, \ldots, U\ell_m$, тогда импликант $U\ell$, для которого выполнено соотношение

$$U\ell \to \bigvee_{j=1}^{m} U\ell_j \equiv 1$$

(импликант $U\ell$ обращается в единицу на тех же наборах, что и дизъюнкция ядерных импликантов), не входит ни в одну из тупиковых ДНФ функции $f(x_1,...,x_n)$.

Возвращаясь к примеру 2, отметим, что импликант $x_1\bar{x}_4$ удовлетворяет следствию из теоремы 8: $x_1\bar{x}_4 \to \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \equiv 1$ и поэтому не входит ни в одну тупиковую форму.

Импликант $x_2x_3x_4$, для которого

$x_2x_3x_4 \rightarrow \bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor x_1x_2 \not\equiv 1$, не удовлетворяет следствию.

Импликант $\bar{x}_1x_3x_4$, для которого

$\bar{x}_1x_3x_4 \rightarrow \bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor x_1x_2 \not\equiv 1$, не удовлетворяет следствию.

Импликант $\bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3$, для которого

$\bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3 \rightarrow \bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor x_1x_2 \not\equiv 1$, не удовлетворяет следствию.

Таким образом, последовательность действий при выполнении второго этапа состоит в следующем:

1) для каждого простого импликанта сокращённой ДНФ проверить, входит он в ядро или нет. Отметить неядерные импликанты;

2) проверить для отмеченных импликантов выполнение следствия из теоремы 8. Простые импликанты, для которых выполнено следствие, удалить из сокращённой ДНФ;

3) проверить возможность удаления оставшихся отмеченных конъюнкций. Из полученных тупиковых ДНФ выбрать минимальную ДНФ.

Рассмотрим эту последовательность действий на примере 2:

1) нашли ядро функции f (x_1, x_2, x_3, x_4), состоящее из простых импликантов $\bar{x}_2\,\bar{x}_4$ и x_1x_2. Отметим курсивом в сокращённой ДНФ неядерные импликанты:

$\bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor \mathit{x_1\,\bar{x}_4} \lor x_1x_2 \lor \mathit{x_2x_3x_4} \lor \mathit{\bar{x}_1x_3x_4} \lor \mathit{\bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3}$;

2) среди помеченных импликантов нашли удовлетворяющий следствию из теоремы 8. Это импликант $x_1\,\bar{x}_4$. Удалим его из сокращённой ДНФ:

$\bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor x_1x_2 \lor \mathit{x_2x_3x_4} \lor \mathit{\bar{x}_1x_3x_4} \lor \mathit{\bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3}$;

3) для получения тупиковых ДНФ удаляем подмножества отмеченных импликантов. Можно удалить следующие подмножества:

$\{x_2x_3x_4,\ \bar{x}_1x_3x_4,\ \bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3\}^{I}$, $\{x_2x_3x_4,\ \bar{x}_1x_3x_4\}^{II}$, $\{x_2x_3x_4,\ \bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3\}^{III}$, $\{\bar{x}_1x_3x_4,\ \bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3\}^{IV}$, $\{x_2x_3x_4\}^{V}$, $\{\bar{x}_1x_3x_4\}^{VI}$, $\{\bar{x}_1\,\bar{x}_2x_3\}^{VII}$.

При каждом удалении нужно проверять, представляет ли оставшаяся ДНФ функцию f (x_1, x_2, x_3, x_4).

Если удалить подмножество I, то получим ДНФ, не представляющую функцию f (x_1, x_2, x_3, x_4), так как на наборе {0,1,1,1} функция

f (x_1, x_2, x_3, x_4), = 1, а $\bar{x}_2\,\bar{x}_4 \lor x_1x_2=0$.

Если удалить подмножество II, то получим ДНФ, не представляющую функцию f (x_1, x_2, x_3, x_4), так как на наборе {0,1,1,1} функция

$f(x_1, x_2, x_3, x_4), = 1$, а $\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\ \bar{x}_2x_3 = 0$.

Если удалить подмножество III, получим минимальную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3x_4$ **- минимальная ДНФ.**

3.5.3 Минимизация ДНФ методом Квайна

Существуют и другие методы, позволяющие независимо от исходной формы представления функции найти все ее тупиковые формы и выбрать из них минимальную. Одним из них является метод Квайна. В соответствии с этим методом отыскание минимальной ДНФ проводится в несколько этапов.

Первый этап. Функция, заданная в виде логической формулы произвольной формы, представляется в совершенной ДНФ. При этом:

1) последовательным применением эквивалентных преобразований логическая функция приводится к ДНФ, то есть к форме, не содержащей знаков отрицания над функциями, более сложными, чем один из аргументов;

2) каждый член ДНФ, представляющий собой конъюнкцию менее n членов (n - количество аргументов функции), развертывается в дизъюнкцию нескольких элементарных конъюнкций умножением на выражение вида $(x_1 \vee \bar{x}_1)(x_2 \vee \bar{x}_2)$..., тождественно равное единице;

3) приводятся, если возможно, подобные члены.

Второй этап. Отыскиваются все простые импликанты данной функции. Для этого выписываются все элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ. Каждая из пар этих конъюнкций исследуется на возможность склеивания. Члены, участвовавшие хотя бы в одном склеивании, отмечаются, но не исключаются из дальнейших сравнений.

В результате выявляются группы конъюнкций, содержащие по (n - 1) члену. С этой группой конъюнкций проводится та же процедура, после которой получим группы конъюнкций, содержащие по (n - 2) членов и так далее, пока не останется ни одного члена, допускающего склеивания с каким либо другим членом.

Добавление к исходной ДНФ любого количества «склеенных» членов не изменяет вида функции. Последующее исключение всех членов, отмеченных в процессе склеивания, тоже не изменяет функцию, так как они поглощаются склеенными членами. Все неотмеченные в процессе преобразований члены представляют собой простые импликанты, а их дизъюнкция эквивалентна исходной функции.

Третий этап. Дизъюнкция всех простых импликантов может оказаться избыточной формой представления функции. Поэтому исследуется возможность удаления некоторых из них. Для этого составляется **импликантная таблица**, строки которой обозначаются выявленными на втором этапе простыми импликантами, а столбцы – элементарными конъюнкциями, входящими в совершенную ДНФ.

Любая клетка этой таблицы отмечается, если простой импликант, записанный в соответствующей строке, является составной частью элементарной конъюнкции, записанной в соответствующем столбце. Иначе говоря, данный простой импликант покрывает нашу функцию на наборе, соответствующем элементарной конъюнкции, записанной в столбце.

В каждом столбце при этом может оказаться несколько отмеченных клеток. Задача упрощения ДНФ сводится к вычеркиванию из таблицы максимального количества строк таким образом, чтобы заданная функция на всех наборах, обращающих ее в единицу, оказалась покрытой хотя бы одним простым импликантом.

Эту задачу можно выполнить в следующей последовательности:

1) выявляются столбцы, содержащие только одну помеченную клетку. Простые импликанты, соответствующие этим клеткам, записываются в окончательное выражение для ДНФ как обязательные члены. После этого в таблице вычеркиваются строки, соответствующие обязательным простым ипликантам и столбцы, содержащие отмеченные клетки в вычеркнутых строках. Вычеркивание столбцов возможно потому, что соответствующие им элементарные конъюнкции уже покрыты обязательными простыми импликантами и поэтому их можно исключить из дальнейшего рассмотрения;

2) если после этого в таблице окажутся такие пары столбцов, что всем отмеченным клеткам второго столбца соответствуют в тех же строках отмеченные клетки первого столбца, а возможно, и некоторые другие отмеченные клетки, то первый столбец вычеркивается. Это возможно потому, что какую бы совокупность простых импли-

кантов, покрывающую элементарную конъюнкцию, которая соответствует второму столбцу мы ни подобрали, этой совокупностью автоматически будет покрываться и конъюнкция, соответствующая первому столбцу;

3) строки, не содержащие после выполнения п.п. 1) и 2) ни одной отмеченной клетки, также вычеркиваются. Это возможно потому, что все конъюнкции, которые могут быть покрыты данным простым импликантом, уже покрыты другими простыми импликантами, которые должны войти в окончательное выражение для ДНФ;

4) в сокращенной таблице выявляется пара строк, содержащая хотя бы по одной отмеченной клетке в каждом столбце. Простые импликанты, соответствующие этим строкам, добавляются к ДНФ;

5). Если оказывается несколько вариантов выполнения п. 4) , то все они сравниваются и выбирается простейший вариант.

Пример. Минимизировать функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$. В результате развертывания элементарных конъюнкций получим:

$x_1x_2x_3x_4$,
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$,
~~$x_1x_2x_3x_4$,~~
$\bar{x}_1x_2x_3x_4$,
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$,
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$,
~~$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$,~~
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

После приведения подобных слагаемых:

1) $x_1x_2x_3x_4$,
2) $x_1x_2\bar{x}_3x_4$,
3) $\bar{x}_1x_2x_3x_4$,
4) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$,
5) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$,
6) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

После склеивания получим:

1) $x_1x_2x_4$ (1,2),
2) $x_2x_3x_4$ (1,3),
3) $\bar{x}_1x_3x_4$ (3,4),
4) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ (4,5),
5) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ (5,6).

Импликантная таблица представлена в таблице 3.7.

Таблица 3.7 - Импликантная таблица

	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$x_1x_2x_4$	X	X				
$x_2x_3x_4$	X		X			
$\bar{x}_1x_3x_4$			X	X		
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$				X	X	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$					X	X

Вычеркивая строки и столбцы, соответствующие обязательным импликантам $x_1x_2x_4$ и $\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4$, получим упрощенную импликантную таблицу (табл. 3.8).

Таблица 3.8 - Упрощенная импликантная таблица

	$\bar{x}_1x_2x3x_4$	$\bar{x}_1\ \bar{x}_2x_3x_4$
$x_2x_3x_4$	X	
$\bar{x}_1x_3x_4$	X	X
$\bar{x}_1\ \bar{x}_2x_3$		X

Из упрощенной таблицы видно, что простой импликант $x_1x_3x_4$ покрывает обе оставшиеся конъюнкции. Теперь можно окончательно записать минимальную ДНФ для функции f (x_1, x_2, x_3, x_4):

$$f\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_4 \lor \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor \bar{x}_1x_3x_4.$$

Для уменьшения количества проверок на возможность склеивания целесообразно все элементарные конъюнкции, содержащие одинаковое число букв, сгруппировать по признаку одинакового количества инвертированных (или не инвертированных) букв. Тогда проверять можно только элементы двух соседних групп. Метод Квайна с таким усовершенствованием называется методом Квайна-Мак-Класки.

3.6 Автоматные описания

При разработке системы управления некоторым объектом необходимым этапом является формализация функционирования будущего устройства. Рассмотрим три вида описаний, относящихся к типу автоматных.

Рис. 3.1 – Модель черного ящика

Будем представлять будущее устройство в виде «черного ящика» (рис. 3.1), у которого есть **входы** x_1, x_2,...,x_q и **выходы** y_1, y_2, ...,y_p и «что-то внутри». Внутреннее содержание «черного ящика» нам не известно, но его функционирование мы можем описывать с помощью **внутренних состоя-**

ний будущего устройства. Точное число входов и выходов системы управления известно, так как каждый вход ее есть выход некоторого датчика, установленного на объекте управления или на пульте управления (в этом случае датчиком является человек-оператор), а каждый выход ее есть вход некоторого исполнительного механизма на объекте управления или индикатора сигнализации на пульте.

Разработчику известно смысловое значение всех входов x_i и выходов y_j. Часто на практике x_i и y_j принимают двоичные значения, например, x_i - «включено», «выключено»; y_j - «включить», «выключить». Сигнал по входу или по выходу может быть и недвоичным, но дискретным. Например, датчик температуры показывает три уровня : 1) ниже - 5^{o}С; 2) от -5^{o}С до +5^{o}С; 3) выше +5^{o}С. В этом случае вместо одного входа x от датчика температуры введем два: x_i' и x_i''. При этом возможны четыре комбинации двоичных значений на этих входах: 00, 01, 10, 11. Три из них можно сопоставить трем сигналам от датчика температуры.

Будем обозначать через X_i набор значений входных сигналов и Y_j – набор значений выходных сигналов. Если, например, устройство имеет три входа и в некоторый момент времени $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, то двоичный номер этого набора есть 100. Таким образом, этому набору соответствует вход X_4.

Составим теперь таблицу, в левой части которой перечислены все входные наборы, а в правой – соответствующие им выходные наборы. Если устройство управления имеет q входов и p выходов, то таблица будет содержать 2^q строк, а в правой ее части будут перечислены выходы из 2^p возможных. Заметим, что заполнить такую таблицу можно только тогда, когда каждый набор X_i однозначно определяет набор Y_j. Если это так, то говорят, что система управления представляет собой **комбинационную схему** (автомат без памяти). Сама таблица называется **автоматной таблицей** и дает **автоматное описание** системы управления.

Приведем пример составления автоматной таблицы. Пусть необходимо спроектировать следующую систему управления. Кондиционер малой мощности должен включаться, если температура воздуха в помещении достигнет +10^{o}С и выключаться, когда температура достигнет +22^{o}С. После этого должен включиться мощный кондиционер. Если же температура достигнет +30^{o}С, необходимо включить оба кондиционера. Наконец если температура достигнет значения +35^{o}C, необходимо выдать аварийный сигнал.

Исходя из условий задачи, можно считать, что проектируемое устройство имеет один вход, принимающий пять значений: 1) $t^o < 10^oC$; 2) $+10^oC \le t^o < +22^oC$; 3) $+22^oC \le t^o < +30^oC$; 4) $+30^oC \le t^o < +35$; 5) $t^o \ge 35^oC$.

Для перехода к двоичным входным сигналам введем три входа: x_1, x_2, x_3. На них можно реализовать 8 различных двоичных комбинаций. Выберем любые пять из них (например, 000, 001, 010, 011, 100) и закодируем ими упомянутые показания датчика температуры.

Выходами устройства управления являются три двоичных сигнала: y_1, y_2, y_3. Значение $y_1 = 1$ соответствует включению кондиционера малой мощности, $y_1 = 0$ – отключению этого кондиционера, $y_2 = 1$ – включению кондиционера большой мощности, $y_2 = 0$ – его отключению, $y_3 = 1$ соответствует включению сигнала аварии, $y_3 = 0$ – отсутствию этого сигнала. Теперь можно составить автоматную таблицу (табл. 3.9). Эта таблица имеет две особенности: 1) в правой части не заполнены три последние строки; 2) для набора X_4 не определен однозначно выходной набор.

Таблица 3.9 - Автоматная таблица

Входы			Выходы		
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	?	?	1
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Действительно, входные наборы 101, 100, 111 не соответствуют никакому сигналу от датчика температуры и никогда не появляются на входе системы управления. Такие наборы входов называются **неиспользуемыми** (о том, как заполнять таблицу в этом случае, скажем позднее). Кроме того, из задания неясно, что делать с кондиционерами, если температура стала аварийной (входной набор 100): оставить включенными (соответствующий выходной набор

111), отключить (выходной набор 001), либо оставить включенным один из них (выходные наборы 101, 011). После уточнения этого вопроса (с заказчиком) неоднозначность должна быть устранена.

Возможна ситуация, когда разработчику не удается составить таблицу так, чтобы каждому входному набору в ней соответствовал единственный выходной набор. В этом случае мы имеем дело с **автоматом с памятью**. Так, для нашего примера на вопрос разработчика о том, что нужно выдавать при входном наборе 100, заказчик может ответить, что это зависит от состояния исполнительных механизмов в момент возникновения аварийной ситуации. Если кондиционеры были включены, то следует оставить их включенными, а если они не были включены, то включать их не следует. При таком ответе неоднозначность в таблице устранить не удастся. Есть два способа выхода из положения:

1) увеличить число входов системы управления, дополнив их сигналами датчиков, регистрирующих состояние каждого кондиционера;

2) в системе управления организовать память, в которой будут фиксироваться действия, которые она формировала в прошлом. Формально это означает введение множества внутренних состояний системы. Обозначим это множество $Z = \{z_0, z_1,...,z_k\}$. Среди элементов множества Z выделим начальное состояние объекта z_0. В каждой конкретной задаче начальное состояние связывается с некоторым фиксированным состоянием объекта.

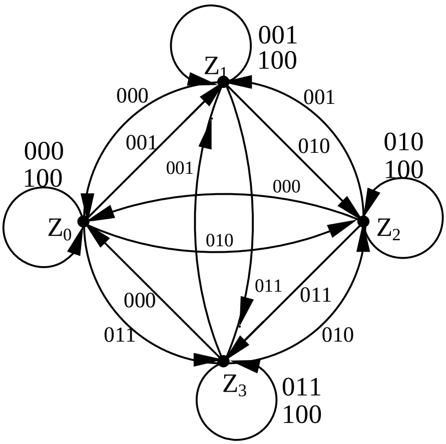


Рис. 3.2 – Граф переходов

В нашем примере с кондиционерами множество внутренних состояний $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$. Начальное состояние z_0 соответствует ситуации, когда оба кондиционера выключены, z_1 – включенному кондиционеру малой мощности и выключенному кондиционеру большой мощности, z_2 – включенному кондиционеру большой мощности и выключенному кондиционеру малой мощности, z_3 – состояние, когда оба кондиционера включены.

Построим **граф переходов** рассматриваемого автомата с памятью. Вершинами графа являются состояния z_0, z_1, z_2, z_3, дуги соответствуют переходам из одного состояния в другое. Каждая дуга помечается входным набором, при котором осуществляется соответствующий переход (рис. 3.2). Петлям графа соответствуют два набора, что следует из условий задачи и уточнений заказчика.

Информацию о смене состояний можно представить в виде так называемой **таблицы переходов** (для нашего примера это табл. 3.10). На пересечении строк и столбцов этой таблицы стоят внутренние состояния, в которые переходит система при данной комбинации внутреннего состояния и входного набора.

Таблица 3.10 – Таблица переходов

Состояния	Входы				
	000	001	010	011	100
Z_0	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_0
Z_1	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1
Z_2	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_2
Z_3	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_3

Таблица переходов еще не содержит полной информации о работе системы управления: необходимо указать, как формируются выходные наборы, подаваемые системой управления на объект. Для этого таблицу или граф переходов нужно дополнить **таблицей выходов**. В случае нашего примера она имеет вид табл. 3.11.

Таблица 3.11 – Таблица выходов

Состояния	Входы				
	000	001	010	011	100
Z_0	000	100	010	110	001
Z_1	000	100	010	110	101
Z_2	000	100	010	110	011
Z_3	000	100	010	110	111

В отличие от таблицы переходов, на пересечении строк и столбцов таблицы выходов указаны выходные наборы, формируемые системой управления.

Таблицы переходов и выходов называются **автоматными таблицами**. Задание таких таблиц является одной из форм **автоматного описания** системы управления.

Если на дугах графа переходов выписать еще и выходные наборы, соответствующие входному набору и внутреннему состоянию, из которого эта дуга выходит, то мы получим полное задание системы управления. Такой граф называется **автоматным графом** и дает еще одно автоматное описание, эквивалентное табличному. Однако каждая из этих форм автоматного описания имеет свои преимущества. Таблицы дают возможность осуществить формальный переход к структуре системы управления. С другой стороны, автоматный граф позволяет судить о том, полно ли сформулированы условия функционирования системы управления и нет ли противоречий в формулировке задания. Неполнота задания проявляется в наличии в графе вершин, из которых при некоторых входных наборах не указаны дуги переходов. Противоречивость может выявляться либо в наличии двух одинаково помеченных дуг, ведущих из одной вершины в разные, либо в том, что одной и той же дуге и входному набору сопоставляется более одного выходного набора.

3.7 Синтез комбинационных схем

С помощью аппарата булевых функций можно получить наиболее компактное автоматное описание системы управления. Кроме того, этот аппарат может быть эффективно использован при переходе от автоматного описания к структурной реализации системы управления. Приведем одну из методик синтеза комбинационной схемы с одним выходом, основанную на исходном представлении в виде совокупности таблиц истинности булевых функций. Для полноты изложения перечислим все этапы проектирования, хотя некоторые из них уже были рассмотрены ранее.

Первый этап. 1. По заданному в техническом задании алгоритму выделяем независимые аргументы (входы) и выписываем все их комбинации (входные наборы). При большом количестве входов следует попытаться объединить их или реализовать устройство по частям.

2. Отмечаем запрещенные наборы, т.е. комбинации входных сигналов, которые не могут возникнуть.

3. Выписываем все значения выхода для каждого незапрещенного набора. При этом нужно проверить, зависит ли это значение только от комбинации входов, или еще и от последовательности их появления в каждой комбинации. В первом случае получим таблицу истинности. Во втором случае делаем вывод о том, что заданный алгоритм нельзя реализовать с помощью комбинационного устройства.

4. Доопределяем таблицу на запрещенных наборах, пользуясь информацией, имеющейся в алгоритме, либо руководствуясь следующим (не всегда наилучшим) соображением: если в таблице больше единичных значений выхода, чем нулевых, она доопределяется единичными значениями и наоборот.

5. Записываем аналитическое выражение выхода как булевой функции входов в совершенной ДНФ, если единичных значений выхода в таблице меньше, и в совершенной КНФ – в противном случае.

Второй этап. 6. Упрощаем полученное выражение. Для этой цели можно либо использовать известные методы минимизации булевых функций, дающее минимально возможное в некотором смысле выражение, либо применить систему эквивалентных преобразований. Дополним уже знакомые нам эквивалентные преобразования следующими соотношениями:

$$(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee \overline{x}_1) = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee \overline{x}_1),$$

$$x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3\overline{x}_1 = x_1x_2 \vee x_3\overline{x}_1,$$

$$f(x_1, x_2,...,x_n) = x_1 f(1, x_2,...,x_n) \vee \overline{x}_1 f(0, x_2,...,x_n),$$

$$f(x_1, x_2,...,x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2,...,x_n))(\overline{x}_1 \vee f(1, x_2,...,x_n)),$$

$$x_1 f(x_1, x_2,...,x_n) = x_1 f(1, x_2,...,x_n),$$

$$x_1 \vee f(x_1, x_2,...,x_n) = x_1 \vee f(0, x_2,...,x_n),$$

$$\overline{x}_1 f(x_1, x_2,...,x_n) = \overline{x}_1 f(0, x_2,...,x_n),$$

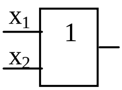
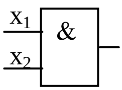
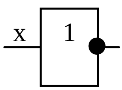
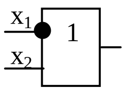
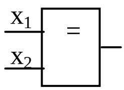
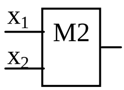
$$\overline{x}_1 \vee f(x_1, x_2,...,x_n) = \overline{x}_1 \vee f(1, x_2,...,x_n).$$

Эффект применения эквивалентных преобразований зависит от последовательности их применения. Наиболее важными являются склеивание $x_i \vee \overline{x}_i = 1$ и поглощение $x_i \vee x_i x_j = x_i$. К сожалению, нельзя указать такой порядок применения эквивалентных преобразований, который обеспечивал бы наиболее простую форму записи булевой функции.

Третий этап. 7. Пользуясь таблицами, имеющимися в литературе, преобразуем полученные на втором этапе выражения в такие, логические операции которых соответствуют выбранному функционально полному набору элементов. При этом следует иметь в виду, что в новом базисе минимальность выражения не гарантируется.

8. Выбираем обозначение для каждой логической операции, реализуемой элементами данного набора. Существуют стандартные изображения базисных функций как некоторых блоков, техническая реализация которых может быть основана на использовании различных физических явлений: магнитных, явлений в полупроводниках и т.д. Примеры таких символических обозначений представлены в таблице 3.12.

Таблица 3.12 – Логические элементы и их обозначения

Элемент	Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	Конъюнкция $x_1 \cdot x_2$	Отрицание $\overline{x}$	Импликация $x_1 \to x_2$	Эквивалентность $x_1 \sim x_2$	Сложение по mod 2 $x_1 \oplus x_2$
Обозначение						

9. По аналитическому выражению строим логическую схему. При этом необходимо соблюдать очередность, раскрывая выражение «изнутри наружу». Полученная в результате логическая схема может оказаться избыточной. Например, пусть имеем минимальное выражение булевой функции $y = (x_1 \vee x_2)\, x_3 \vee \overline{(x_1 \vee x_2)}\, x_4$. Переходя к логической схеме, получим шесть элементов, причем два из них реализуют функцию $x_1 \vee x_2$. Поэтому нужно постараться упростить

логическую схему, находя общие части выражения и объединяя их в схеме. Для нашего примера окончательно получим схему, изображенную на рис. 3.3.

Четвертый этап. 10. От логической схемы выражения, описывающего работу системы управления, можно непосредственно перейти к принципиальной схеме устройства, так как каждому условному изображению функции на логической схеме соответствует физический элемент, реализующий данную операцию и имеющий несколько вариантов принципиальной схемы в зависимости от элементной базы. Соединения между элементами задаются связями на логической схеме.

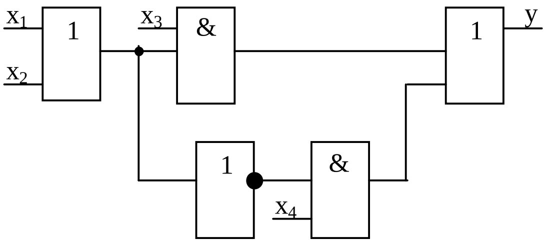


Рис. 3.3 – Логическая схема

3.8 Логика предикатов

3.8.1 Предикаты и операции квантирования

Развитием уже знакомой нам алгебры высказываний является логика предикатов, Это тоже логическая система или определенный язык описания знаний. В логике предикатов наряду с высказываниями рассматриваются некоторые высказывательные функции, называемые предикатами.

Рассмотрим вначале некоторые примеры:

1) «x – простое число». Это выражение не является высказыванием, пока мы не заменим переменную x на какое-либо определенное число. При x = 1 получим истинное высказывание, при x = 6 – ложное. Таким образом, выражение «x – простое число» есть некоторая функция P (x), зависящая от переменной x. Область определе-

ния P (x) – множество чисел, область значений P (x) – высказывания;

2) «x больше y». Это выражение можно рассматривать как функцию Q (x, y), зависящую от переменных x и y. Она становится высказыванием после того, как x и y заменим их значениями.

В общем случае под **предикатом от n переменных** понимается выражение $P(x_1, x_2,.., x_n)$, которое становится высказыванием после подстановки вместо переменных $x_1, x_2,.., x_n$ их значений из множеств $M_1, M_2,..., M_n$ соответственно. Элементы этих множеств называются **предметами**, а переменные $x_1, x_2,.., x_n$ – **предметными переменными**. Множество $M_1 \times M_2 \times\ldots\times M_n$ (декартово произведение) упорядоченных наборов длины n называется **полем предиката** $P (x_1, x_2,.., x_n)$. Если число предметных переменных равно нулю, то предикат есть высказывание.

Будем обозначать:

$x, y, z,.., x_1, x_2, x_3,...$ (малые буквы конца латинского алфавита) – предметные переменные;

$a, b, c,.., a_1, a_2, a_3,...$ (малые буквы начала латинского алфавита) – предметы из множеств $M_1, M_2,.., M_n$;

A (x), B, F (x, y), $P (x_1, x_2,.., x_n)$ – предикаты. Символы 0,1, как и прежде, обозначают истину и ложь.

К предикатам можно применять операции алгебры высказываний (конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность, отрицание) и получать новые предикаты. Это действительно так: заменяя предметные переменные в предикатах их значениями из некоторого множества предметов, мы получим высказывания истинные или ложные, а применяя к ним операции логики высказываний, получим новые высказывания.

Пусть, например, «x = y» – предикат A (x, y), а «x < y» – предикат B (x, y). Тогда

$$A (x, y) \vee B (x, y)$$

– новый предикат, полученный применением операции дизъюнкции.

Помимо операций алгебры высказываний в логике предикатов есть две специфические операции, связанные с природой предикатов.

Пусть дан предикат P (x), зависящий от одной переменной и определенный на поле M.

Выражение $\forall x\ P(x)$ («для всякого x, P (x)») означает высказывание, истинное только в том случае, когда предикат P (x) истинен для всех предметов из поля M. Здесь символ $\forall$ – **квантор общности**.

Выражение $\exists x\ P(x)$ («существует x такой, что P (x)») означает высказывание, истинное только в том случае, когда предикат P (x) истинен хотя бы для одного предмета из поля M; символ $\exists$ – **квантор существования**.

Эти две операции называются операциями квантирования. Рассмотрим примеры применения операций квантирования. Пусть даны предикаты над полем натуральных чисел:

1) $x^2 = xx$, тогда $\forall x\ (x^2 = xx)$ – истинное высказывание;

2) $x + 2 = 7$, тогда $\forall x\ (x + 2 = 7)$ – ложное;
$\exists x\ (x + 2 = 7)$ – истинное;

3) $x + 2 = x$, тогда $\exists x\ (x + 2 = x)$ – ложное.

Операции квантирования легко обобщаются на случай, когда предикат зависит от n переменных. Пусть $G(x_1, x_2,.., x_n)$ – предикат от переменных $x_1, x_2,.., x_n$ над полем $M = M_1 \times M_2 \times .. \times M_n$. Подставим вместо переменных $x_1,.., x_{i-1}, x_{i+1},.., x_n$ предметы $a_1,.., a_{i-1}, a_{i+1},.., a_n$ из множеств $M_1,.., M_{i-1}, M_{i+1},.., M_n$. Получим предикат $G(a_1,.., a_{i-1}, x_i, a_{i+1},.., a_n)$, зависящий только от одной переменной x_i. Следовательно, выражение

$$\forall x_i\ G(a_1,.., a_{i-1}, x_i, a_{i+1},.., a_n)$$

есть высказывание. Отсюда выражение

$$\forall x_i\ G(x_1,.., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},.., x_n)$$

есть предикат от n-1 переменной. Он не зависит от x_i. Значение его для данного набора $(a_1,.., a_{i-1}, a_{i+1},.., a_n)$ равно истине, если предикат $G(a_1,.., a_{i-1}, x_i, a_{i+1},.., a_n)$ истинен для всякого предмета из поля M.

Аналогичные рассуждения можно провести для квантора $\exists$. С помощью операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности, отрицания, а также операций квантирования можно получать более сложные предикаты. При этом предметные переменные, по отношению к которым применялись операции квантирования, называются связанными а остальные – свободными.

Например, в предикате

$$\forall x\ (A(x, y) \vee \exists z\ B(z, v))$$

переменные x, z- связанные, y, v- свободные.

Мы рассмотрели предикаты, значения которых (истина или ложь) известны для каждого набора значений свободных предметных переменных. Такие предикаты называются **определенными предикатами**. Но существуют еще так называемые **переменные предикаты**, для которых значения не определены. Будем обозначать переменные предикаты большими буквами латинского алфавита:

$$X, Y,.., X_1, X_2,.., W(x_1, x_2,.., x_n), V(x_1, x_2,.., x_n), \dots$$

Переменный предикат от нуля переменных есть переменное высказывание. Применяя к переменным предикатам операции $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $^{-}$, ~, $\exists$, $\forall$, получим формулы логики предикатов. Так, выражение

$$\forall x\, W(x, y) \vee x \rightarrow U(z)$$

– пример формулы логики предикатов.

3.8.2 Равносильные формулы логики предикатов

Рассматривая формулы логики предикатов над полем M можно говорить о формулах, равносильных над данным полем, то есть о таких формулах, которые принимают одно и то же значение при замене всех свободных предметных переменных предметами и всех переменных предикатов – определенными.

Пример. Рассмотрим формулы $\forall x\, W(x)$ и $\exists x\, W(x)$ над полями $M_1 = \{a\}$ и $M_2 = \{a, b\}$.

Пусть $\forall x\, W(x)$ и $\exists x\, W(x)$ даны над полем M_1, Значениями переменного предиката W (x) могут быть два определенных предиката A(x) и B(x) (табл. 3.13). Составим истинностную таблицу формул (табл. 3.14).

Таким образом, формулы $\forall x\, W(x)$ и $\exists x\, W(x)$ равносильны над полем M_1.

Таблица 3.13 – Предикаты над M_1

x	A (x)	B (x)
a	0	1

Таблица 3.14 – Равносильность над M_1

W (x)	$\forall x\, W(x)$	$\exists x\, W(x)$
A (x)	0	0
B (x)	1	1

Пусть теперь формулы $\forall x\, W(x)$ и $\exists x\, W(x)$ даны над полем M_2. В качестве значений переменного предиката $W(x)$ нужно взять определенные предикаты над полем M_2. Таких предикатов существует четыре (табл.3.15). Составив истинностную таблицу формул $\forall x\, W(x)$ и $\exists x\, W(x)$ (табл.3.16), убеждаемся в их неравносильности над полем M_2.

Таблица 3.15- Предикаты над M_2

x	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$	$I_4(x)$
a	0	0	1	1
b	0	1	0	1

Таблица 3.1- Неравносильность над M_2

$W(x)$	$\forall x\, W(x)$	$\exists x\, W(x)$
$I_1(x)$	0	0
$I_2(x)$	0	1
$I_3(x)$	0	1
$I_4(x)$	1	1

Формулы логики предикатов называются **равносильными**, если они равносильны над любым полем.

Примеры равносильных формул:

1) $\overline{\forall x\, W(x)}$ и $\exists x\, \overline{W(x)}$;
2) $\overline{\forall x\, \overline{W(x)}}$ и $\exists x\, W(x)$;
3) $\overline{\exists x\, W(x)}$ и $\forall x\, \overline{W(x)}$;
4) $\overline{\exists x\, \overline{W(x)}}$ и $\forall x\, W(x)$.

Докажем равносильность первой пары формул. Пусть M – произвольное поле, а $A(x)$ – некоторый определенный предикат над ним. Подставим вместо переменного предиката $W(x)$ определенный предикат $A(x)$. Пусть высказывание $\overline{\forall x\, A(x)}$ истинное, тогда высказывание $\forall x\, A(x)$ ложно. Следовательно, существует предмет *a* из поля M, что $A(a)$ ложно, тогда $\overline{A(a)}$ – истинно. Значит, высказывание $\exists x\, \overline{A(x)}$ истинно. Аналогичными рассуждениями получим, что из предположения ложности высказывания $\overline{\forall x\, A(x)}$ следует ложность высказывания $\exists x\, \overline{A(x)}$.

Среди всех формул логики предикатов можно выделить формулы, истинные над любым полем, их называют **тождественно-истинными**. Например, формула $\forall x\, W(x) \rightarrow \exists x\, W(x)$ является тождественно-истинной.

В общем случае выяснить вопрос, является ли данная формула тождественно-истинной, сложно, так как приходится использовать понятие бесконечности.

3.9 Задачи и упражнения

1. Дано высказывание А: «Существуют четные простые числа». Определите, истинно оно или ложно. Укажите среди следующих высказываний отрицание высказывания А: а) «Существуют нечетные простые числа»; б) «Неверно, что существуют четные простые числа»; в) «Любое простое число нечетно».
2. Для высказывания А: «Любые два треугольника подобны» сформулируйте отрицание и двойное отрицание. Какие из этих трех высказываний истинны?
3. Даны высказывания «Я купил велосипед» (А); «Я путешествовал по России» (В) и «Я участвовал в соревнованиях по велосипеду» (С). Сформулируйте высказывания, соответствующие формулам: $A \wedge B$, $A \wedge B \wedge C$, $A \wedge \overline{C}$, $\overline{A \wedge B}$, $\overline{B} \wedge \overline{C}$.
4. Даны высказывания «Четырехугольник MNPQ – параллелограмм» (А) и «Диагонали четырехугольника MNPQ в точке пересечения делятся пополам» (В). Сформулируйте высказывания, соответствующие формулам $A \to B$, $B \to A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \to B$, $\overline{B} \to A$.
5. Составьте таблицы истинности для следующих формул: $X \to (Y \vee Z)$, $(X \to Y) \vee (X \to Z)$.
6. Покажите, что формулы $X \wedge Y \sim Y \wedge X$, $X \vee Y \sim Y \vee X$, $((X \to Y) \wedge X) \to Y$ являются тавтологиями.
7. Докажите равносильность формул:
   а) $X \wedge (Y \vee Z)$ и $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$;
   б) $X \vee (Y \wedge Z)$ и $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$;
   в) $\overline{X \vee Y}$ и $\overline{X} \wedge \overline{Y}$;
   г) $\overline{X \wedge Y}$ и $\overline{X} \vee \overline{Y}$;
   д) $X \to (Y \to Z)$ и $(X \wedge Y) \to Z$;
   е) $(X \to Y) \wedge (X \to Z)$ и $X \to (Y \wedge Z)$.
8. Постройте совершенные ДНФ и КНФ функций: $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \sim x_2$.
9. Запишите в совершенных ДНФ и КНФ булеву функцию f_1 (x_1, x_2, x_3), принимающую значение 1 на наборах с номерами 0, 3, 7. Определите, к каким классам функций относится эта функция.
10. Проверьте справедливость равенств: $x = \overline{x} \oplus 1$, $x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$.

11. Составьте таблицу свойств булевых функций двух переменных. Из таблицы выпишите все полные системы булевых функций.
12. Проверьте линейность булевой функции f_2 (x_1, x_2, x_3), принимающей значение 1 на наборах с номерами 0, 1, 5, 6.
13. Синтезируйте логические схемы булевых функций из задач № 9, 12 в базисах: а) { ∨, ‾ }; б) { ∧, ‾ }.
14. Найдите минимальную ДНФ функции f (x_1, x_2, x_3, x_4), принимающей значение 1 на наборах с номерами 0, 1, 2, 5, 6. 7, 8, 12, 13.
15. Приведите примеры: а) монотонной функции, которая одновременно была бы линейной; б) самодвойственной функции, которая одновременно была бы линейной; в) линейной и монотонной функций.
16. Покажите, что функции Шеффера и Вебба не являются ни линейными, ни монотонными, ни самодвойственными.
17. Докажите полноту системы булевых функций, состоящей из дизъюнкции, константы 0 и эквивалентности.
18. Путешественник попал к людоедам. Они разрешают ему произнести какое-нибудь высказывание и ставят условие, что если его высказывание будет истинным, то его сварят, а если ложным, то зажарят. Какое высказывание следует произнести путешественнику, чтобы избежать гибели?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

для специальностей 220400 и 071900

В процессе изучения дисциплины студенту следует выполнить четыре контрольных работы (две во втором и две в третьем семестре). Номер варианта выбирается по общим правилам, в соответствии с шифром студента. Оформление КР – стандартное: каждая работа должна содержать титульный лист, в поясняющем тексте следует привести формулировку каждого задания и подробное описание решения задачи, а также список использованной литературы.

Выполненная КР, высылается в адрес ТМЦ ДО обычной или электронной почтой.

Контрольная работа №1

Темой данной КР является теория множеств. Каждая работа содержит шесть заданий из различных разделов теории множеств. Некоторые задания повторяются в различных вариантах. В первом задании приведены ссылки на номера задач данного учебного пособия.

При выполнении КР особое внимание следует обратить на задания, связанные с доказательством тождеств. Нужно помнить, что иллюстрация тождества с помощью диаграмм Эйлера не является его доказательством. Доказательство должно быть проведено путем логических рассуждений.

В качестве примера рассмотрим доказательство тождества

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

представляющего собой свойство дистрибутивности операций объединения и пересечения. Чтобы доказать это тождество, надо показать, что множество $(A \cup B) \cap C$ равно множеству $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, т.е. что каждый элемент первого множества является элементом второго множества, и наоборот.

Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Докажем, что $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Так как x принадлежит пересечению множества $A \cup B$ с множеством C, то $x \in A \cup B$ и $x \in C$. Из того, что $x \in A \cup B$, следует, что или $x \in A$, или $x \in B$. Если $x \in A$, то $x \in A \cap C$ (так как $x \in C$), а значит, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Если же $x \in B$, то $x \in B \cap C$, откуда $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Итак, если $x \in (A \cup B) \cap C$, то $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Пусть теперь $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Докажем, что $x \in (A \cup B) \cap C$. Так как x принадлежит объединению двух множеств $A \cap C$ и $B \cap C$, то $x \in A \cap C$, или $x \in B \cap C$. Если $x \in A \cap C$, то $x \in A$ и $x \in C$. Из того, что $x \in A$, следует, что $x \in A \cup B$, а так как $x \in C$, то $x \in (A \cup B) \cap C$. Если же $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Из того, что $x \in B$, следует, что $x \in A \cup B$, а так как $x \in C$, то $x \in (A \cup B) \cap C$, и тождество доказано полностью.

В задачах, связанных с решением систем уравнений, следует найти искомое множество X из первого и второго уравнений. Общее решение будет являться объединением этих двух решений.

Вариант 1

1. Решите задачи №№ 1, 4, 12, 15, 19 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Докажите тождество: $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Вариант 2

1. Решите задачи №№ 2, 6, 10, 13 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Докажите тождество: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где A, B и C – данные множества и $B \subseteq A \subseteq C$.

Вариант 3

1. Решите задачи №№ 5, 7, 9, 13 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Докажите тождество: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$$

где $B \subseteq A$, $A \cap C = \varnothing$.

Вариант 4

1. Решите задачи №№ 3, 8, 11, 17 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Докажите тождество: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \bigcup X = C, \end{cases}$$

где $B \subseteq A \subseteq C$.

Вариант 5

1. Решите задачи №№ 14, 15, 24 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Составьте список элементов множества A, заданного описательным способом: $A = \{x / x^2 - 8x + 15 = 0\}$.
3. Докажите, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.
4. Докажите тождество: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Вариант 6

1. Решите задачи №№ 7, 15 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Составьте список элементов множества A, заданного описательным способом: $A = \{x / x \in N, -11 < x \leq -3\}$, где N – множество натуральных чисел.
3. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$? Верно ли, что $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?
4. Докажите тождество: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} A \bigcap X = B, \\ X \setminus B = C, \end{cases}$$

где $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$.

Вариант 7

1. Решите задачи №№ 4, 15 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Опишите множества M точек плоскости таких, что
   а) $\{M : OM = R\}$,
   б) $\{M : OM \leq R\}$.
3. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$? Верно ли, что $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?
4. Докажите тождество: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} C \cap X = A, \\ C \setminus X = B, \end{cases}$$

где $B \subseteq A \subseteq C$.

Вариант 8

1. Решите задачи №№ 16, 17 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Опишите множество M точек плоскости таких, что {M : AM = MB}.
3. Найдите все подмножества множеств Ø, {Ø}, {1, 2}, {a, b, c, d}.
4. Докажите тождество: $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
5. При каких A, B и C система уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X, \\ C \cup X = X \setminus A \end{cases}$$

имеет решение?

Вариант 9

1. Решите задачи №№ 7, 13, 14, 24 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. Докажите тождество: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.
3. Существуют ли такие множества A, B и C, что

$$A \cap B \neq \varnothing,\ \ A \cap C = \varnothing,\ \ (A \cap B) \setminus C = \varnothing?$$

Вариант 10

1. Решите задачи №№ 8, 15, 16, 20 (Раздел 1.6, с.17, 18).
2. На множестве M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} задано отношение $x - y \geq 2$. Выпишите пары, принадлежащие этому отношению. Определите его свойства.
3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$$

где $B \subseteq A$, $A \cap C = \varnothing$.

Контрольная работа №2

Тема этой контрольной работы – основы теории графов. В работе требуется выполнить следующие задания.

1. В соответствии с выбранным вариантом построить граф отношения. Если в задании не указано число элементов множества, то оно может быть произвольным, но не менее восьми. При этом нужно постараться учесть все возможные ситуации, возникающие при рассмотрении данного отношения.
2. Для построенного графа найти:
   - матрицу смежности (вершин);
   - матрицу инцидентности;
   - матрицу отклонений (расстояний);
   - вектор отклоненностей (удаленностей);
   - радиус, диаметр, центр, периферийные вершины;
   - число внутренней и внешней устойчивости.
3. Для двух произвольно выбранных графов найти декартово произведение и декартову сумму.

Вариант 1

Постройте граф отношения «быть знакомым» на множестве людей. Определите его свойства.

Вариант 2

Постройте граф отношения «$x + y \geq 7$» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определите его свойства.

Вариант 3

Постройте граф отношения «быть делителем» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определите его свойства.

Вариант 4

Постройте граф отношения «$x – y \leq 2$» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определите его свойства.

Вариант 5

Постройте граф отношения «быть сыном» на множестве людей. Определите его свойства.

Вариант 6

Постройте граф отношения «прямая x пересекает прямую y» на множестве прямых. Определите его свойства.

Вариант 7

Постройте граф отношения «быть сестрой» на множестве людей. Определите его свойства.

Вариант 8

Постройте граф отношения «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат» на множестве точек вещественной плоскости. Определите его свойства.

Вариант 9

Постройте граф отношения «$x + y \leq 7$» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определите его свойства.

Вариант 10

Постройте граф отношения «$x - y \geq 2$» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определите его свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кориков А.М., Сафьянова Е.Н. Основы системного анализа и теории систем: Учебное пособие. – Томск: изд-во Том. ун-та, 1989. – 207 с.
2. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики / Под. ред. К.А. Пупкова. – М.: Высш. школа, 1974. – 416 с.
4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. школа, 1986. – 312 с.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
6. Кузин Л.Т. Основы кибернетики.: В 2 т. Т.2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584 с.
7. Шевелев Ю.П. Высшая математика 5. Дискретная математика. Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра (для автоматизированной технологии обучения): Учебное пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998. – 114 с.