РОССИИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
Федеральное агенство железнодорожного транспорта
ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

В.А. Рукавишников О.П. Ткаченко А.В. Рукавишников

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник лабораторных работ
по дисциплине «Вычислительная математика»

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2005

УДК 519.6(075.8)
ББК В19я73
Р 844

Рецензент:

Доцент кафедры «Систем автоматизированного проектирования»
Дальневосточного государственного университета путей сообщения,
кандидат технических наук
Т.С. Красовская

Рукавишников, В.А.

Р 844 Вычислительная математика: Сборник лабораторных работ/ В.А. Рукавишников, О.П. Ткаченко, А.В. Рукавишников. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2005.– 36 с.: ил.

Сборник лабораторных работ соответствует Государственному образовательному стандарту направления 654600 «Информатика и вычислительная техника» специальности 220300 «Системы автоматизированного проектирования».

Сборник содержит ценные рекомендации, которые будут полезны при подготовке и выполнении лабораторных работ по курсу «Вычислительная математика», а также сами задания к лабораторным работам.

Предназначен для студентов 2 курса дневной формы обучения, изучающих дисциплину «Вычислительная математика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый сборник лабораторных работ составлен в соответствии с программой дисциплины "Вычислительная математика", изучаемой студентами специальности САПР. Разработка состоит из следующих разделов: интерполирование функций (полиномы Лагранжа и Ньютона), численное интегрирование (квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона), методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений (метод Гаусса, метод итераций), методы численного решения уравнений (метод половинного деления, метод хорд, метод касательных, комбинированнный метод хорд и касательных, метод итераций). В каждом разделе приведены необходимые теоретические сведения (основные теоремы, определения, формулы и т.д.), а также вырианты заданий к лабораторным работам. Основныя цель сборника – помощь в развитии практических навыков у студентов в применении численных методов.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Варианты заданий к лабораторным работам выбираются студентом в соответствии с порядковым номером, присвоенным ему в групповом журнале.

Для выполнения лабораторной работы студенту необходимо изучить теоретический материал, соответствующий её теме. Это поможет грамотно и точно сформулировать цель и задачи лабораторной работы, наметить ход её выполнения и реализовать его в соответствии с нижеследующим планом:

1. Постановка задачи.
2. Выбор того или иного теоретического аппарата вычислительной математики, необходимого для решения поставленной задачи.
3. Спецификация задачи в соответствии с исходными данными варианта.
4. Составление блок–схемы вычислительного алгоритма и текста программ для соответствующего численного метода на одном из алгоритмических языков программирования Q–Basic, Pascal, Fortran, C.
5. Получение результатов вычислений и их анализ.
6. Составление отчёта о выполнении лабораторной работы (отчёт составляется в письменном виде и рецензируется преподавателем, осуществляющим руководство практической частью курса).

1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1.1. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть функция $y{=}f(x)$ задана таблицей

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Значения аргументов $x_i\,(i=\overline{0,n})$ будем называть **узлами интерполяции**.

Задачей интерполяции является построение многочлена $L(x)$, значения которого в узлах интерполяции x_i равны соответствующим значениям заданной функции, т.е.

$$L(x_i)=y_i\ (i=\overline{0,n}).$$

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула, представляющая многочлен $L(x)$ в виде

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x),$$

где $p_i(x)$ – многочлен степени n, принимающий значение, равное единице в узле x_i и нулю в остальных узлах $x_k\,(k{\neq}i;\ i,k{=}\overline{0,n})$, и имеющий вид

$$p_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}.$$

Многочлен $L(x)$ называют **интерполяционным полиномом Лагранжа**.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[x_0,x_n]$. Возьмём на этом отрезке множество точек $x_i(i=\overline{0,n})$ и выберем их в качестве узлов интерполяции. Построив многочлен Лагранжа $L(x)$ для системы узлов $\{x_i\}$, положим

$$f(x)\approx L(x)\ \ \forall x\in[x_0,x_n].$$

При этом в узлах интерполяции имеем

$$f(x_i){=}L(x_i)\quad (i{=}\overline{0,n}).$$

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[x_0,x_n]$ непрерывные производные до $(n{+}1)$–го порядка включительно, то погрешность интерполяционной формулы в каждой точке этого отрезка оценивается неравенством

$$|f(x)-L(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)|,$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Задания к лабораторной работе № 1

Функция $y{=}f(x)$ задана таблицей. Пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, вычислить приближённое значение этой функции в указанной точке x.

Вариант 1

x_i	0	0,46	0,48	0,55	0,7	0,75	1
y_i	0	0,208	0,254	0,323	0,493	0,556	0,91

$$x = 0,702$$

Вариант 2

x_i	0	0,4	1	1,4	2	2,6	3
y_i	1	0,868	0,585	0,507	0,547	0,79	0,98

$$x = 0,2$$

Вариант 3

x_i	0	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
y_i	0	0,343	0,399	0,454	0,49	0,534	0,603

$$x = 0,526$$

Вариант 4

x_i	0	0,1	0,68	0,73	0,96	1,1	2
y_i	0	0,1	0,592	0,623	0,744	0,8	0,964

$$x = 0,34$$

Вариант 5

x_i	0	0,11	0,57	0,9	1,07	1,56	2
y_i	0	0,11	0,601	1,027	1,286	2,274	3,627

$$x = 0,64$$

Вариант 6

x_i	0	0,35	0,7	1	1,5	2	2,5
y_i	1	1,062	1,255	1,543	2,352	3,762	6,132

$$x = 1,86$$

Вариант 7

x_i	0	$0,3$	$0,9$	$1,3$	$1,9$	$2,3$	$2,9$
y_i	0	$0,249$	$1,752$	$3,259$	$6,108$	$8,351$	$12,185$

$$x = 1,46$$

Вариант 8

x_i	0	$0,7$	$1,5$	$1,96$	2	$2,3$	$2,7$
y_i	0	$0,283$	$0,519$	$0,619$	$0,627$	$0,682$	$0,747$

$$x = 0,406$$

Вариант 9

x_i	0	$0,35$	$0,7$	1	$1,5$	2	$2,5$
y_i	0	$0,33$	$1,136$	$2,096$	$4,136$	$6,644$	$9,568$

$$x = 1,7$$

Вариант 10

x_i	0	$0,6$	1	$1,5$	2	$2,6$	3
y_i	$0,301$	$0,373$	$0,477$	$0,628$	$0,778$	$0,943$	$1,041$

$$x = 1,43$$

Вариант 11

x_i	0	$0,6$	1	$1,5$	2	$2,6$	3
y_i	$0,693$	$0,859$	$1,099$	$1,447$	$1,792$	$2,17$	$2,398$

$$x = 0,74$$

Вариант 12

x_i	0	$0,6$	1	$1,5$	2	$2,6$	3
y_i	0	$0,294$	$0,347$	$0,367$	$0,366$	$0,406$	$0,447$

$$x = 0,86$$

Вариант 13

x_i	0	1	$1,5$	$1,8$	2	$2,3$	$2,7$
y_i	0	$0,91$	$1,796$	$2,427$	$2,887$	$3,627$	$5,527$

$$x = 1,7$$

Вариант 14

x_i	0	0,7	0,78	1,3	1,9	2,8	3,17
y_i	1	0,707	0,669	0,516	0,528	0,899	0,998

$x = 2,4$

Вариант 15

x_i	0	0,6	1,14	1,66	2	2,64	2,8
y_i	0	0,569	0,977	1,228	1,444	1,698	1,753

$x = 0,66$

Вариант 16

x_i	0	0,5	0,87	1,8	2,3	2,9	3
y_i	0	0,462	0,701	0,947	0,98	0,994	0,995

$x = 1,56$

Вариант 17

x_i	0	0,5	1,1	1,6	2,3	3	3,1
y_i	1	1,128	1,669	2,577	5,037	10,068	11,122

$x = 1,86$

Вариант 18

x_i	1	1,03	1,07	1,1	1,12	1,15	1,19
y_i	2,718	2,801	2,915	3,004	3,065	3,158	3,387

$x = 1,128$

Вариант 19

x_i	1	1,04	1,08	1,1	1,13	1,17	1,2
y_i	0,368	0,353	0,34	0,333	0,323	0,311	0,3

$x = 1,19$

Вариант 20

x_i	1	1,05	1,07	1,11	1,14	1,17	1,2
y_i	1,175	1,254	1,286	1,352	1,404	1,456	1,509

$x = 1,359$

Вариант 21

x_i	1	1,02	1,07	1,13	1,16	1,18	1,2
y_i	1,543	1,567	1,629	1,709	1,752	1,781	1,811

$$x = 1,173$$

Вариант 22

x_i	1	1,02	1,06	1,1	1,12	1,15	1,18
y_i	0,842	0,852	0,872	0,891	0,9001	0,913	0,925

$$x = 1,042$$

Вариант 23

x_i	1	1,02	1,05	1,08	1,16	1,19	1,2
y_i	0,54	0,515	0,498	0,471	0,399	0,372	0,362

$$x = 1,197$$

Вариант 24

x_i	1	1,02	1,05	1,09	1,13	1,17	1,2
y_i	0	0,019	0,049	0,086	0,122	0,157	0,182

$$x = 1,137$$

Вариант 25

x_i	0	0,46	0,48	0,55	0,7	0,75	1
y_i	0	0,208	0,254	0,323	0,493	0,556	0,91

$$x = 0,402$$

1.2. Интерполяционные полиномы Ньютона

Пусть для функции $y{=}f(x)$ заданы значения $y_i{=}f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной $x_i{=}x_0{+}ih$, $i{=}\overline{0,n}$, где h – **шаг интерполяции**. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n, принимающий в точках x_i значения

$$P_n(x_i){=}y_i, \quad i{=}\overline{0,n}.$$

Пусть $t = \dfrac{x-x_0}{h}$. Формула

$$P_n(x) = y_o + t\,\triangle y_o + \frac{t(t-1)}{2!}\,\triangle^2 y_o + +... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\,\triangle^n y_o,$$

называется **первой интерполяционной формулой Ньютона** (формулой для "интерполирования вперёд"). Эту формулу выгодно использовать для интерполирования функции $y{=}f(x)$ в окрестности начального значения x_o, где t мало по абсолютной величине. Если же значение аргумента x находится ближе к концу отрезка интерполирования, то удобнее использовать **вторую интерполяционную формулу Ньютона** (формулу для "интерполирования назад"):

$$P_n(x) = y_n + q\,\triangle y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\,\triangle^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\,\triangle^3 y_{n-3} + ... +$$

$$+\frac{q(q+1)...(q+n-1)}{n!}\,\triangle^n y_o,$$

где $q = \dfrac{x-x_n}{h}$.

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[x_0, x_n]$ непрерывные производные до $(n+1)$–го порядка включительно, то погрешности первой и второй интерполяционных формул Ньютона в каждой точке этого отрезка оцениваются неравенствами

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |t(t-1)(t-2)...(t-n)|$$

и

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |q(q+1)(q+2)...(q+n)|,$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Задания к лабораторной работе № 2

Функция $y{=}f(x)$ задана таблицей. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, вычислить приближённое значение этой функции в указанной точке x.

Вариант 1

x_i	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
y_i	2	1,96	1,793	1,408	0,909	0,479

$$x = 0,274$$

Вариант 2

x_i	0	$0,35$	$0,7$	$1,05$	$1,4$	$1,75$
y_i	0	$0,184$	$1,057$	$2,7234$	$4,905$	$7,064$

$$x = 1,69$$

Вариант 3

x_i	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
y_i	5	$4,587$	$3,049$	$1,689$	1	$0,69$

$$x = 2,453$$

Вариант 4

x_i	0	$0,3$	$0,6$	$0,9$	$1,2$	$1,5$
y_i	$0,69$	1	$1,689$	$3,049$	$4,587$	5

$$x = 0,219$$

Вариант 5

x_i	0	$0,35$	$0,7$	$1,05$	$1,4$	$1,75$
y_i	2	$1,96$	$1,793$	$1,408$	$0,909$	$0,479$

$$x = 0,419$$

Вариант 6

x_i	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$1,25$
y_i	0	$0,444$	$1,099$	$1,707$	$2,195$	$2,471$

$$x = 1,19$$

Вариант 7

x_i	0	$1,1$	$2,2$	$3,3$	$4,4$	$5,5$
y_i	0	$0,35$	$0,797$	$1,062$	$1,157$	$1,184$

$$x = 0,541$$

Вариант 8

x_i	0	$0,17$	$0,34$	$0,51$	$0,68$	$0,85$
y_i	$2,681$	$2,663$	$2,095$	$1,6$	$1,31$	$0,659$

$$x = 0,693$$

Вариант 9

x_i	0	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5
y_i	2	1,96	1,793	1,408	0,909	0,479

$x = 0,789$

Вариант 10

x_i	1	1,35	1,7	2,05	2,4	2,75
y_i	2	1,96	1,793	1,408	0,909	0,479

$x = 1,152$

Вариант 11

x_i	0	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
y_i	2	1,96	1,793	1,408	0,909	0,479

$x = 1,541$

Вариант 12

x_i	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625
y_i	2,681	2,663	2,095	1,6	1,31	0,659

$x = 0,619$

Вариант 13

x_i	0	0,35	0,7	1,05	1,4	1,75
y_i	5	4,587	3,049	1,689	1	0,69

$x = 1,69$

Вариант 14

x_i	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
y_i	0	0,184	1,057	2,7234	4,905	7,064

$x = 0,253$

Вариант 15

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	0,69	1	1,689	3,049	4,587	5

$x = 0,219$

Вариант 16

x_i	0	$0,35$	$0,7$	$1,05$	$1,4$	$1,75$
y_i	1	$0,804$	$0,743$	$0,896$	$1,254$	$1,752$

$$x = 1,657$$

Вариант 17

x_i	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$1,25$
y_i	$0,301$	$0,804$	$0,499$	$0,737$	$0,944$	$1,101$

$$x = 0,019$$

Вариант 18

x_i	0	$1,1$	$2,2$	$3,3$	$4,4$	$5,5$
y_i	$1,184$	$1,157$	$1,062$	$0,797$	$0,35$	0

$$x = 0,515$$

Вариант 19

x_i	0	$0,7$	$1,4$	$2,1$	$2,8$	$3,5$
y_i	$2,681$	$2,663$	$2,095$	$1,6$	$1,31$	$0,659$

$$x = 0,711$$

Вариант 20

x_i	0	$0,6$	$1,2$	$1,8$	$2,4$	3
y_i	2	$1,96$	$1,793$	$1,408$	$0,909$	$0,479$

$$x = 0,789$$

Вариант 21

x_i	$1,25$	$2,5$	$3,75$	5	$6,25$	$7,5$
y_i	2	$1,96$	$1,793$	$1,408$	$0,909$	$0,479$

$$x = 5,15$$

Вариант 22

x_i	$0,3$	$0,6$	$0,9$	$1,2$	$1,5$	$1,8$
y_i	$1,96$	$1,793$	$1,408$	$0,909$	$0,479$	$0,32$

$$x = 0,364$$

Вариант 23

x_i	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75
y_i	0,015	0,184	1,057	2,7234	4,905	7,064

$$x = 0,69$$

Вариант 24

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	5	4,587	3,049	1,689	1	0,69

$$x = 0,111$$

Вариант 25

x_i	0	0,45	0,9	1,35	1,8	2,25
y_i	5	4,587	3,452	2,687	1,453	0,775

$$x = 0,81$$

2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ТРАПЕЦИЙ И СИМПСОНА

Для приближённого вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ разобьём отрезок интегрирования $[a,b]$ на n равных частей точками $x_o{=}a$, $x_1{=}x_o{+}h$,..., $x_{i+1}{=}x_i{+}h$,..., $x_n{=}b$ (h – шаг разбиения, $h{=}(b{-}a)/n$). Значения функции $f(x)$ в точках разбиения x_i обозначим через y_i. Непрерывная подинтегральная функция $y{=}f(x)$ заменяется **сплайном** – кусочно–полиномиальной функцией $S(x)$, аппроксимирующей данную функцию. Интегрируя функцию $S(x)$ на отрезке $[a,b]$, придём к некоторой формуле численного интегрирования – **квадратурной формуле**. В зависимости от функции $S(x)$, аппроксимирующей подинтегральную функцию, будем получать различные квадратурные формулы.

Если на каждой части $[x_{i-1}, x_i]$ $(i{=}\overline{1,n})$ деления отрезка $[a,b]$ функцию $f(x)$ заменить функцией, принимающей постоянное значение, равное, например, значению функции $f(x)$ в серединной точке i–й части $x_{i-1/2}{=}\dfrac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$, то функция $S(x)$ будет иметь ступенчатый вид

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-1/2} = f(x_{i-1/2}),\ \ x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1,n}.$$

В этом случае

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} S_i(x)dx = \sum_{i=1}^n hy_{i-1/2}$$

и получаем квадратурную **формулу прямоугольников**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b S(x)dx = h(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{i-1/2} + ... + y_{n-1/2}).$$

Если функцию $f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ заменить её линейной интерполяцией по точкам (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), то получим непрерывную кусочно–линейную функцию

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + y_i\frac{x - x_i}{h},\;\; x \in [x_{i-1}, x_i],\;\; i = \overline{1, n}.$$

Графиком этой функции является ломаная линия. В этом случае

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} S_i(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

и получаем квадратурную **формулу трапеций**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b S(x)dx = h\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).$$

Если сплайн $S(x)$, аппроксимирующий подинтегральную функцию $f(x)$, представляет собой непрерывную функцию, составленную из примыкающих парабол, то можно получить квадратурную **формулу Симпсона**, называемую также **формулой парабол**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[y_o - y_n + \sum_{k=1}^n (4y_{k-1/2} + 2y_k)\right].$$

Приближённое значение интеграла $I_{\text{параб}}$, вычисленное по квадратурной формуле парабол, можно выразить через значения $I_{\text{прям}}$ и $I_{\text{трап}}$ – результаты вычислений по квадратурным формулам прямоугольников и трапеций:

$$I_{\text{параб}} = \frac{2}{3}I_{\text{прям}} + \frac{1}{3}I_{\text{трап}}.$$

Погрешность каждой квадратурной формулы оценивается величиной остаточного члена $R(h)$, зависящего от шага разбиения h (или от числа разбиений n):

$$R(h) = \left|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b S(x)dx\right|.$$

Если подинтегральная функция имеет непрерывную производную второго порядка, то

для формулы прямоугольников

$$R(h) \le \frac{b-a}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot h^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|;$$

для формулы трапеций

$$R(h) \le \frac{b-a}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot h^2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Если подинтегральная функция имеет непрерывную производную четвёртого порядка, то справедлива такая оценка погрешности формулы Симпсона:

$$R(h) \le \frac{b-a}{2880} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \cdot h^4 = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Практически важно вести вычисления до достижения заданной точности ε по той или иной квадратурной формуле. Этой цели удовлетворяет **метод двойного пересчёта**, который заключается в следующем. По квадратурной формуле проводят вычисление интеграла с шагом h и получают значение $I(h)$. Затем уменьшают шаг вдвое и получают новое приближённое значение интеграла $I(h/2)$. Чтобы определить, как сильно уклоняется значение $I(h/2)$ от точного значения интеграла I, используют **правило Рунге**:

$$|I - I(h/2)| \approx \frac{1}{2^k - 1}|I(h) - I(h/2)|,$$

где $k = 2$ для квадратурных формул прямоугольников и трапеций и $k = 4$ для формулы Симпсона.

При заданной точности ε вычисления с уменьшающимся шагом проводят до окончания приближений при выполнении условия

$$\frac{1}{2^k - 1}|I(h) - I(h/2)| < \varepsilon.$$

При этом полагают $I \approx I(h/2)$ с точностью ε.

Задания к лабораторной работе № 3

Найти приближённое значение определённого интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона с точностью 10^{-3}.

Вариант	1	2	3	4	5
Интеграл	$\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}dx$	$\int\limits_0^2 x\ln(x+1)dx$	$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$	$\int\limits_0^1 x^2e^{x+1}dx$	$\int\limits_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$

Вариант	6	7	8	9	10
Интеграл	$\int\limits_0^1 e^{x^2+1}dx$	$\int\limits_0^2 \frac{14e^x}{(2+x^2)^2}dx$	$\int\limits_0^3 \sqrt[3]{x^2+e^x}dx$	$\int\limits_0^1 x^4e^xdx$	$\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{x^3}dx$

Вариант	11	12	13	14	15
Интеграл	$\int\limits_1^2 \cos x^2dx$	$\int\limits_1^2 e^{x^3}dx$	$\int\limits_1^3 \sin x^5dx$	$\int\limits_1^3 \ln(x^2+x)dx$	$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x+1}dx$

Вариант	16	17	18	19	20
Интеграл	$\int\limits_1^3 \frac{\cos x}{x}dx$	$\int\limits_1^2 \ln^3 xdx$	$\int\limits_1^3 \sin(\cos x)dx$	$\int\limits_2^4 \log_7 x^2dx$	$\int\limits_0^2 4^{x^4}dx$

Вариант	21	22	23	24	25
Интеграл	$\int\limits_1^2 \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$	$\int\limits_1^2 x\log_5 x^2dx$	$\int\limits_1^2 \frac{e^x}{x^3}dx$	$\int\limits_0^1 (x+1)^2 2^xdx$	$\int\limits_1^{1,5} \frac{\mathrm{tg} x}{x}dx$

3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Метод исключения неизвестных Гаусса

Пусть дана система S, состоящая из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

при условии, что её основная матрица невырождена.

Процесс решения системы S по способу Гаусса распадается на два этапа. Первый этап, состоящий в последовательном приведении системы к ступенчатому виду, называется **прямым ходом**. Второй этап – последовательное исключение неизвестных – носит название **обратного хода**. Рассмотрим общую схему метода Гаусса для систем, имеющих единственное решение.

Предположим, что $a_{11}{\neq}0$. В противном случае можно поменять местами первое уравнение с уравнением, в котором коэффициент при неизвестном x_1 отличен от нуля. Разделим первое уравнение системы S на a_{11}. Оно примет вид:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \tag{3.2}$$

где $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11}$, $b_1^{(1)} = b_1/a_{11}$; $j{=}\overline{1,n}$.

Умножим разрешающее уравнение (3.2) на a_{21} и вычтем полученное уравнение из второго уравнения системы (3.1) Аналогично преобразуем остальные уравнения. В результате этих операций система S примет вид:

$$S : \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - a_{1j}^{(1)}a_{21}$, $a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - a_{1j}^{(1)}a_{31}$, ... , $a_{nj}^{(1)} = a_{nj} - a_{1j}^{(1)}a_{n1}$,
$b_j^{(1)} = b_j - b_1^{(1)}a_{j1}$ $(j = \overline{2,n})$.

Естественно, что если какой–либо из коэффициентов a_{k1} окажется равным нулю, то k–ое уравнение системы (3.1) войдёт в систему (3.3) без изменений, т.е. $a_{kj}^{(1)} = a_{kj}$, $b_k^{(1)} = b_k$.

Далее, оставив без изменений первое уравнение системы (3.3), можно сделать второе уравнение разрешающим и применить описанную процедуру к системе из $n-1$ уравнений, исключив неизвестное x_2 из третьего и последующих уравнений. Получим систему вида

$$S : \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad\qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad\quad a_{33}^{(2)}x_3 + ... + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\quad a_{n3}^{(2)}x_3 + ... + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}, \end{cases}$$

где $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $b_2^{(2)} = b_2^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{2j}^{(2)}a_{32}^{(1)}, ...,$
$a_{nj}^{(2)} = a_{nj}^{(1)} - a_{2j}^{(2)}a_{n2}^{(1)}$, $b_j^{(2)} = b_j^{(1)} - b_2^{(2)}a_{j2}^{(1)}$ $(j = \overline{3,n})$.

Продолжая аналогичные вычисления, приведём систему S к ступенчатой системе следующего вида:

$$S : \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad\qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + ... + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \; ... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{3.4}$$

На этом заканчивается прямой ход решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

При обратном ходе протсходит последовательное исключение неизвестного x_n, начиная с $(n-1)$–го уравнения системы (3.4) и заканчивая первым. Получаем

$$S: \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} & = b_1^{(1,1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} & = b_2^{(2,1)}, \\ x_3 + \ldots + a_{3,n-1}^{(3)}x_{n-1} & = b_3^{(3,1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} & = b_{n-1}^{(n-1,1)}, \\ x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Затем последовательно исключаем неизвестное x_{n-2} из уравнений системы (3.5) с номерами $i = \overline{n-2,1}$ и т.д. Вычисления заканчиваются решением системы, имеющим вид

$$S: \begin{cases} x_1 = b_1^{(1,n-1)}, \\ x_2 = b_2^{(2,n-2)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} = b_{n-2}^{(n-2,2)}, \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1,1)}, \\ x_n = b_n^{(n)}. \end{cases}$$

Заметим, что процедура прямого хода в методе Гаусса может привести не к верхнетреугольной матрице, а к двум другим случаям:

1) число преобразованных уравнений системы меньше числа неизвестных (это происходит, если в процессе преобразований получаются тождества $0 \equiv 0$) – тогда система S имеет бесчисленное множество решений;

2) все коэффициенты при неизвестных в каком–нибудь уравнении равны нулю, в то время как свободный член уравнения отличен от нуля – тогда система S не имеет решений.

Задания к лабораторной работе № 4

Методом исключения неизвестных Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	5	0	1	1	3	−1	−3	2	10	11	4	6
2	2	0	−1	−1	3	1	1	−1	4	−3	2	3
3	2	0	−1	1	−3	1	1	1	3	1	2	4
4	5	1	−1	−1	3	1	1	−2	4	−5	5	1
5	3	1	−1	−2	4	1	1	1	3	−1	5	−3
6	3	1	−1	2	4	1	1	−1	3	6	9	4
7	2	−1	0	2	5	−2	1	−1	3	−2	−4	2
8	3	−1	1	0	2	−1	−1	1	5	1	3	−5
9	4	1	−1	2	3	0	1	−1	5	7	7	11
10	2	0	−1	1	−4	2	1	1	3	1	−5	6
11	2	−1	0	0	5	2	1	−1	3	3	7	4
12	3	1	−1	1	5	−1	2	0	3	−2	8	1
13	3	0	1	2	−5	1	2	−2	6	−4	9	8
14	3	0	−1	2	−5	1	2	2	5	7	−2	1
15	3	−1	1	3	5	1	−1	2	4	0	12	−1
16	−4	2	1	−1	5	1	2	0	3	−5	−5	5
17	5	−1	1	−1	3	1	2	1	4	−3	−1	1
18	4	2	1	3	5	−1	2	1	−4	3	4	6
19	4	1	2	0	3	1	1	2	4	−6	−1	−5
20	3	1	1	0	−2	1	2	−1	4	6	−3	−1
21	2	−1	0	2	5	1	2	1	−4	−5	2	−7
22	5	0	1	1	−3	1	3	−1	5	11	3	11
23	5	−1	3	1	−3	1	0	1	2	0	−6	0
24	5	−1	1	−2	5	1	3	−1	5	−6	13	0
25	5	1	−1	−1	3	1	−1	0	2	8	0	−5

3.2. Метод итераций

Рассмотрим систему S, состоящую из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.6}$$

Если все диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0\,(i = \overline{1,n})$, то систему S

можно представить в так называемом приведённом виде:

$$S: \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{nn}x_n + \beta_n, \end{cases} \tag{3.7}$$

где обозначено:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \ (i = \overline{1,n}), \alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & i{=}j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i{\neq}j. \end{cases}$$

Введём обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

и перепишем систему (3.7) в виде одного матричного уравнения

$$x = \alpha x + \beta. \tag{3.8}$$

Последовательные приближения (итерации) найдём следующим образом. Возьмём в качестве начального приближения $x^{(o)}$ вектор β и подставим его в правую часть уравнения (3.8); получим $x^{(1)}$. Продолжая аналогичные вычисления, придём к векторной последовательности приближений:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha x^{(o)} + \beta \ - \ \text{первое приближение,} \\ x^{(2)} &= \alpha x^{(1)} + \beta \ - \ \text{второе приближение,} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{(k+1)} &= \alpha x^{(k)} + \beta \ - \ (k{+}1)\text{–е приближение,} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.9}$$

Если существует предел $x^\star$ последовательности векторов $x^{(k)}$, то, переходя к пределу в равенстве $x^{(k+1)}{=}\alpha x^{(k)}{+}\beta$ при $k \to \infty$, убеждаемся, что $x^\star$ является решением уравнения (3.8), т.е.

$$x^\star = \alpha x^\star + \beta.$$

Достаточные условия сходимости итераций к решению содержит следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если какая–либо норма матрицы α меньше единицы ($\|\alpha\| < 1$), то уравнение (3.8) имеет единственное решение $x^\star$, к которому стремится последовательность итераций (3.9) при любом выборе начального приближения $x^{(o)}$.*

В расчётах полагают $x^{(o)} = \beta$. Погрешность приближённого решения уравнения (3.8) на k–ом шаге оценивают неравенством

$$\|x^\star - x^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\|. \tag{3.10}$$

Из неравенства (3.10) можно получить оценку числа итераций k, необходиимых для обеспечения заданной точности ε.

Отклонение приближения $x^{(k)}$ от решения $x^\star$ по норме не будет превышать ε, если

$$\|x^\star - x^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\| \le \varepsilon. \tag{3.11}$$

Неравенство (3.11) даёт обычно завышенную оценку числа итераций k. Условие, позволяющее принять приближение $x^{(k)}$ в качестве решения с точностью ε, можно представлять в следующей удобной для вычислительного процесса форме:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \frac{1-\|\alpha\|}{\|\alpha\|}\varepsilon. \tag{3.12}$$

Замечание. Достаточные условие сходимости процесса итераций для неприведённой системы S вида (3.6) можно представить в виде

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=\overline{1,n}),$$

или

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j=\overline{1,n}).$$

Задания к лабораторной работе № 5

Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Вариант 1

$$\begin{cases} x_1{=}0,23x_1{-}0,004x_2{+}0,21x_3{-}0,18x_4{+}1,24, \\ x_2{=}0,45x_1{-}0,23x_2{+}0,06x_3{-}0,88, \\ x_3{=}0,26x_1{+}0,34x_2{-}0,11x_3{+}0,62, \\ x_4{=}0,05x_1{-}0,26x_2{+}0,34x_3{-}0,12x_4{-}1,17; \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} x_1{=}0,21x_1{+}0,12x_2{-}0,34x_3{-}0,16x_4{-}0,64, \\ x_2{=}0,34x_1{-}0,08x_2{+}0,17x_3{-}0,18x_4 + 1,42, \\ x_3{=}0,16x_1{+}0,34x_2{+}0,15x_3{-}0,31x_4{-}0,42, \\ x_4{=}0,12x_1{-}0,26x_2{-}0,08x_3{-}0,25x_4{+}0,83; \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} x_1{=}0,32x_1{-}0,18x_2{+}0,02x_3{+}0,21x_4{+}1,83, \\ x_2{=}0,16x_1{+}0,12x_2{-}0,14x_3{+}0,27x_4{-}0,65, \\ x_3{=}0,37x_1{+}0,27x_2{-}0,02x_3{-}0,24x_4{+}2,23, \\ x_4{=}0,12x_1{+}0,21x_2{-}0,18x_3{-}0,25x_4{-}1,13; \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} x_1{=}0,42x_1{-}0,52x_2{+}0,03x_3{+}0,44, \\ x_2{=}0,31x_1{-}0,26x_2{-}0,36x_3{+}1,42, \\ x_3{=}0,12x_1{+}0,08x_2{-}0,14x_3{-}0,24x_4{-}0,83, \\ x_4{=}0,15x_1{-}0,35x_2{-}0,18x_3{-}1,42; \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} x_1{=}0,18x_1{-}0,34x_2{-}0,12x_3{+}0,15x_4{-}1,33, \\ x_2{=}0,11x_1{+}0,23x_2{-}0,45x_3{+}0,32x_4{+}0,84, \\ x_3{=}0,05x_1{-}0,12x_2{+}0,14x_3{-}0,18x_4{-}1,16, \\ x_4{=}0,12x_1{+}0,08x_2{+}0,06x_3 + 0,57; \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} x_1{=}0,13x_1{+}0,23x_2{-}0,44x_3{-}0,05x_4{+}2,13, \\ x_2{=}0,24x_1{-}0,31x_3{+}0,15x_4{-}0,18, \\ x_3{=}0,06x_1{+}0,15x_2{-}0,23x_4{-}1,44, \\ x_4{=}0,72x_1{-}0,08x_2{-}0,05x_3{-}2,42; \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} x_1=0,17x_1+0,31x_2-0,18x_3+0,22x_4-1,17, \\ x_2=-0,21x_1+0,33x_2+0,22x_4+0,62, \\ x_3=0,32x_1-0,18x_2+0,05x_3-0,19x_4-0,89, \\ x_4=0,12x_1+0,28x_2-0,14x_3+0,94; \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} x_1=0,13x_1+0,27x_2-0,22x_3-0,18x_4+1,21, \\ x_2=-0,21x_1-0,45x_3+0,18x_4-0,33, \\ x_3=0,12x_1+0,13x_2-0,33x_3+0,18x_4-0,48, \\ x_4=0,33x_1-0,05x_2+0,06x_3-0,28x_4-0,17; \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} x_1=0,19x_1-0,07x_2+0,11x_3+0,33x_4-0,64, \\ x_2=-0,22x_1-0,08x_2-0,14x_3+0,27x_4-0,65, \\ x_3=0,51x_1-0,07x_2+0,09x_3-0,11x_4+1,71, \\ x_4=0,33x_1-0,41x_2-1,21; \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} x_1=0,22x_1-0,11x_3-0,31x_4+2,7, \\ x_2=0,38x_1-0,12x_2+0,22x_4-1,5, \\ x_3=0,11x_1+0,23x_2-0,51x_4+1,2, \\ x_4=0,17x_1-0,21x_2+0,31x_3-0,17; \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} x_1=0,07x_1-0,08x_2+0,11x_3-0,18x_4-0,51, \\ x_2=0,18x_1+0,52x_2+0,21x_4+1,17, \\ x_3=0,13x_1+0,31x_2-0,21x_4-1,02, \\ x_4=0,08x_1-0,33x_3+0,28x_4-0,28; \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} x_1=0,05x_1-0,06x_2-0,12x_3+0,14x_4-2,17, \\ x_2=0,04x_1-0,12x_2+0,68x_3+0,11x_4+1,4, \\ x_3=0,34x_1+0,08x_2-0,06x_3+0,44x_4-2,1, \\ x_4=0,11x_1+0,12x_2-0,03x_4-0,8; \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} x_1{=}0,08x_1{-}0,03x_2{-}0,08x_4{+}0,81, \\ x_2{=}0,51x_2{+}0,27x_3{+}0,27x_4{-}0,65, \\ x_3{=}0,33x_1{-}0,37x_3{+}0,21x_4{-}0,92, \\ x_4{=}0,11x_1{+}0,03x_2{+}0,58x_4{+}0,17; \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} x_1{=}0,12x_1{-}0,23x_2{+}0,25x_3{-}0,16x_4{+}1,24, \\ x_2{=}0,14x_1{+}0,34x_2{-}0,18x_3{+}0,24x_4{-}0,89, \\ x_3{=}0,33x_1{+}0,03x_2{+}0,46x_3{-}0,32x_4{+}1,15, \\ x_4{=}0,12x_1{-}0,05x_2{+}0,15x_4{-}0,57; \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} x_1{=}0,23x_1{-}0,14x_2{+}0,06x_3{-}0,12x_4{+}1,21, \\ x_2{=}0,12x_1{+}0,32x_3 0,18x_4{-}0,72, \\ x_3{=}0,08x_1{-}0,12x_2{+}0,23x_3{+}0,32x_4{-}0,58, \\ x_4{=}0,25x_1{+}0,22x_2{+}0,14x_3{+}1,56; \end{cases}$$

Вариант 16

$$\begin{cases} x_1{=}0,14x_1{+}0,23x_2{+}0,18x_3{+}0,17x_4{-}1,42, \\ x_2{=}0,12x_1{-}0,14x_2{+}0,08x_3{+}0,09x_4{-}0,83, \\ x_3{=}0,16x_1{+}0,24x_2{-}0,35x_4{+}1,21, \\ x_4{=}0,23x_1{-}0,08x_2{+}0,55x_3{+}0,25x_4{+}0,65; \end{cases}$$

Вариант 17

$$\begin{cases} x_1{=}0,24x_1{+}0,21x_2{+}0,06x_3{-}0,34x_4{+}1,42, \\ x_2{=}0,05x_1{+}0,32x_3{+}0,12x_4{-}0,57, \\ x_3{=}0,35x_1{-}0,27x_2{-}0,05x_4{+}0,68, \\ x_4{=}0,12x_1{-}0,43x_2{+}0,34x_3{-}0,21x_4{-}2,14; \end{cases}$$

Вариант 18

$$\begin{cases} x_1{=}0,17x_1{+}0,27x_2{-}0,13x_3{-}0,11x_4{-}1,42, \\ x_2{=}0,13x_1{-}0,12x_2{+}0,09x_3{-}0,06x_4{+}0,48, \\ x_3{=}0,11x_1{+}0,05x_2{-}0,02x_3{-}0,12x_4{-}2,34, \\ x_4{=}0,13x_1{+}0,18x_2{+}0,24x_3{+}0,43x_4{+}0,72; \end{cases}$$

Вариант 19

$$\begin{cases} x_1{=}0,15x_1{+}0,05x_2{-}0,08x_3{+}0,14x_4{-}0,48, \\ x_2{=}0,32x_1{-}0,43x_2{-}0,12x_3{+}0,11x_4{+}1,24, \\ x_3{=}0,17x_1{+}0,06x_2{-}0,08x_3{+}0,12x_4{+}1,15, \\ x_4{=}0,21x_1{-}0,16x_2{+}0,36x_3{-}0,88; \end{cases}$$

Вариант 20

$$\begin{cases} x_1{=}0,28x_2{-}0,17x_3{+}0,06x_4{-}0,21, \\ x_2{=}0,52x_1{+}0,12x_2{-}0,17x_4{-}1,17, \\ x_3{=}0,07x_1{-}0,18x_2{-}0,21x_3{-}0,81, \\ x_4{=}0,1x_1{+}0,22x_2{+}0,03x_3{-}0,05x_4{+}0,72; \end{cases}$$

Вариант 21

$$\begin{cases} x_1{=}0,52x_2{-}0,08x_3{+}0,13x_3{-}0,22, \\ x_2{=}0,07x_1{-}0,38x_2{-}0,05x_3{-}0,41x_4{+}1,8, \\ x_3{=}0,04x_1{-}0,42x_2{+}0,11x_3{-}0,07x_4{-}1,3, \\ x_4{=}0,17x_1{-}0,18x_2{-}0,13x_3{-}0,19x_4{+}0,33; \end{cases}$$

Вариант 22

$$\begin{cases} x_1{=}0,01x_1{+}0,02x_2{-}0,62x_3{+}0,08x_4{-}1,3, \\ x_2{=}0,03x_1{-}0,28x_2{+}0,33x_3{-}0,07x_4{+}1,1, \\ x_3{=}0,09x_1{+}0,13x_2{+}0,42x_3{+}0,38x_4{-}1,7, \\ x_4{=}0,19x_1{-}0,23x_2{+}0,08x_3{+}0,37x_4{+}1,5; \end{cases}$$

Вариант 23

$$\begin{cases} x_1{=}0,17x_2{-}0,33x_3{+}0,18x_4{-}1,2, \\ x_2{=}0,18x_2{-}0,43x_3{-}0,08x_4{+}0,33, \\ x_3{=}0,22x_1{+}0,18x_2{+}0,21x_3{+}0,07x_4{+}0,48, \\ x_4{=}0,08x_1{+}0,07x_2{+}0,71x_3{+}0,04x_4{-}1,2; \end{cases}$$

Вариант 24

$$\begin{cases} x_1{=}0,03x_1{-}0,05x_2{+}0,22x_3{-}0,33x_4{+}0,43, \\ x_2{=}0,22x_1{+}0,55x_2{-}0,88x_3{+}0,07x_4 - 1,8, \\ x_3{=}0,33x_1{+}0,13x_2{-}0,08x_3{-}0,05x_4{-}0,8, \\ x_4{=}0,08x_1{+}0,17x_2{+}0,29x_3{+}0,33x_4{+}1,7; \end{cases}$$

Вариант 25

$$\begin{cases} x_1{=}0,13x_1{+}0,22x_2{-}0,33x_3{+}0,07x_4{+}1,11, \\ x_2{=}0,45x_2{-}0,23x_3{+}0,07x_4{-}0,33, \\ x_3{=}0,11x_1{-}0,08x_3{+}0,78x_4{+}0,85, \\ x_4{=}0,08x_1{+}0,09x_2{+}0,33x_3{+}0,21x_4{-}1,7. \end{cases}$$

4. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Пусть $f(x)=0$ – некоторое уравнение. Можно выделить следующие этапы численного решения этого уравнения:
1) отделение корней, т.е. установление промежутков, в которых содержится один корень уравнения;
2) вычисление корня, принадлежащего выбранному промежутку, с заданной точностью.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то внутри этого промежутка найдётся нуль функции. А если при указанных условиях функция $f(x)$ ещё и монотонна на $[a, b]$, то нуль у функции на этом промежутке единственный.

Отделение корней уравнения $f(x)=0$ для непрерывной в области определения функции $f(x)$ можно осуществить различными способами:
1) составляется таблица значений функции $y=f(x)$ на определённом промежутке изменения аргумента x, и если окажется, что для соседних значений аргументов значения функций имеют разные знаки, то нуль функции находится между ними;
2) уравнение $f(x)=0$ заменяют равносильным $\varphi(x)=\psi(x)$. Строят графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$; искомый корень является абсциссой точки пересечения этих графиков;
3) строят график функции $y=f(x)$ на промежутке изменения x; тогда абсцисса точки пересечения графика с осью (Ox) – нуль функции.

Второй этап численного решения уравнений предполагает использование того или иного численного метода. Далее мы рассмотрим такие численные методы решения уравнений: метод половинного деления, метод хорд, метод касательных, комбинированный метод, а также метод итераций.

4.1. Метод половинного деления

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{4.1}$$

причём функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$ (т.е. на $[a, b]$ есть корень уравнения (4.1)). Найдём середину отрезка $[a, b]$: $x_1=\dfrac{a+b}{2}$. Если $f(x_1)\neq 0$, то для продолжения вычислений выберем ту из частей данного отрезка $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1.

Новый суженный промежуток $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и проводим вычисления по разобранной схеме и т.д. В результате получаем либо точный корень данного уравнения на каком–то этапе, либо последовательность вложенных отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... таких, что

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \ \ (n = 1, 2, ...), \tag{4.2}$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \tag{4.3}$$

Число ξ – общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – является корнем уравнения (4.1). Оценку погрешности решения на n–ом шаге вычислений можно получить из соотношения (4.3) в виде:

$$0 \leq \xi - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a) = b_n - a_n.$$

Здесь $a_n \approx \xi$ с точностью ε, не превышающей $\dfrac{1}{2^n}(b - a)$.

4.2. Метод хорд

Пусть корень ξ уравнения (4.1) отделён на отрезке $[a, b]$, причём $f(a)f(b)<0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Кроме того, пусть на $[a, b]$ знакопостоянны первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$.

Геометрически метод хорд эквивалентен замене кривой $y=f(x)$ хордой, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (рис. 1).

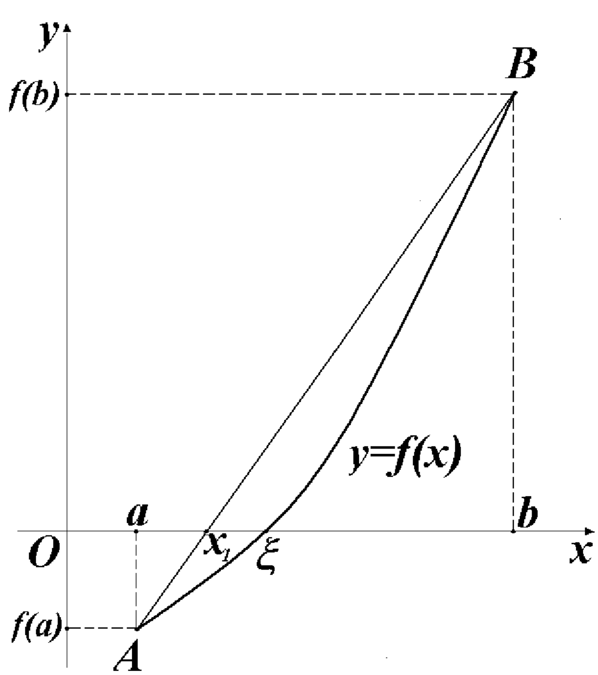

Рисунок 1.

Уравнение хорды AB имеет вид:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{4.4}$$

Обозначим через x_1 абсциссу точки пересечения этой хорды с осью (Ox). Тогда, полагая в (4.4) $x{=}x_1$ и $y{=}0$, получим:

$$x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a).$$

Пусть для определённости $f''(x){<}0$ на $[a,b]$ (случай $f''(x){>}0$ сводится к нашему, если записать уравнение (4.1) в виде $-f(x){=}0$). Тогда кривая $y{=}f(x)$ будет вогнута и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB. Возможны два случая: 1) $f(a){>}0$ (рис. 2) и 2) $f(a){<}0$ (рис. 3).

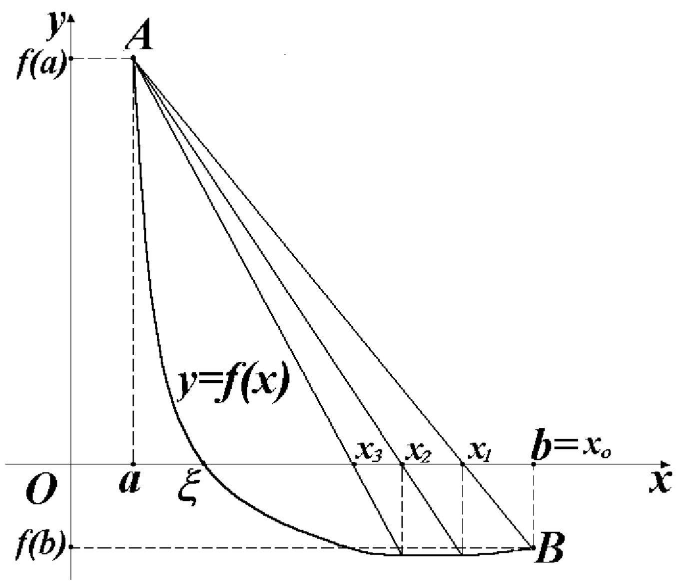

Рисунок 2.

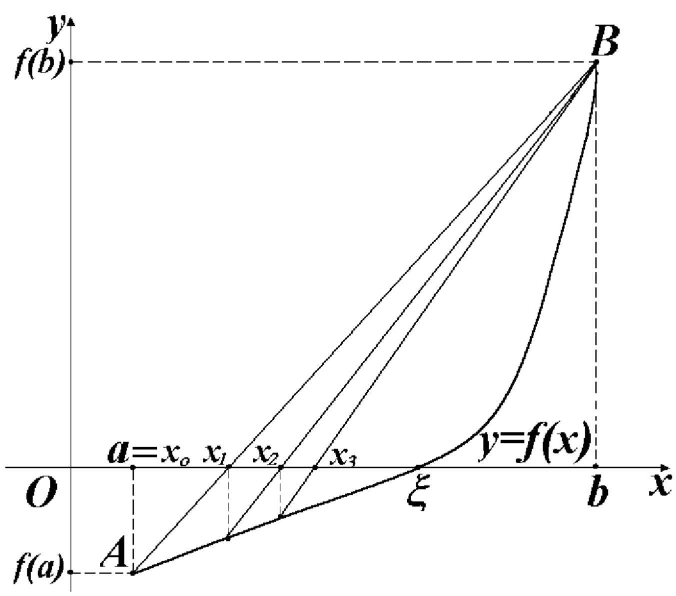

Рисунок 3.

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения

$$x_o = b; \;\; x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} f(x_n) \;\; (n = 0, 1, 2, ...) \tag{4.5}$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причём

$$a < \xi < ... < x_{n+1} < x_n < ... < x_1 < x_o.$$

Во втором случае неподвижен конец b, а последовательные приближения

$$x_o = a; \;\; x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) \;\; (n = 0, 1, 2, ...) \tag{4.6}$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причём

$$x_o < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} < ... < \xi < b.$$

Обобщая эти результаты, заключаем:

1) неподвижен тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком её второй производной $f''(x)$, т.е. если $f''(x)f(a){>}0$, $x{\in}[a, b]$, то неподвижна точка A (используется формула (4.5)); если $f''(x)f(b){>}0$, $x{\in}[a, b]$, то неподвижна точка B (используется формула (4.6));

2) последовательные приближения $\{x_n\}$ лежат по ту сторону корня ξ, где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку её второй производной $f''(x)$.

Методами математического анализа доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}\xi$.

Практически следует вычислять x_n до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность ε. Как только будет обнаружено, что

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon,$$

в качестве приближённого решения уравнения (4.1) можно принять значение x_n.

4.3. Метод касательных

Пусть корень ξ уравнения (4.1) отделён на отрезке $[a, b]$, причём $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и знакопостоянны на отрезке $[a, b]$

Геометрически метод касательных эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y{=}f(x)$ касательной, проведённой в некоторой точке кривой. Для определённости предположим, что $f''(x){>}0$ на $[a, b]$ (рис. 4).

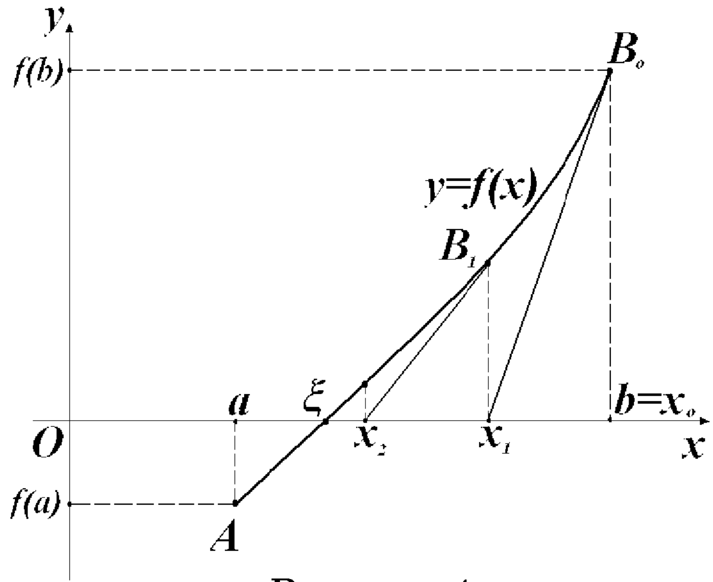

Рисунок 4.

Выберем, например, $x_o{=}b$, для которого $f(x_o)f''(x_o){>}0$. Проведём касательную к кривой $y{=}f(x)$ в точке $B_o(x_o, f(x_o))$. В качестве первого приближения x_1 корня ξ возьмём абсциссу точки пересечения этой касательной с осью (Ox). Через точку $B_1(x_1, f(x_1))$ снова проведём касательную, абсцисса точки пересечения которой даст нам второе приближение x_2 корня ξ и т.д. Очевидно, что уравнение касательной в точке $B_n(x_n, f(x_n))$ есть

$$y{-}f(x_n){=}f'(x_n)(x{-}x_n).$$

Полагая в этом уравнении $y{=}0$, $x{=}x_{n+1}$, получим формулу

$$x_{n+1}{=}x_n{-}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4.7}$$

Замечание. Если в нашем случае положить $x_o{=}a$ и, следовательно, $f(x_o)f''(x_o){<}0$, то, проведя касательную к кривой $y{=}f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, мы получили бы точку x_1, лежащую вне отрезка $[a, b]$, т.е. при этом выборе начального значения метод касательных оказывается непрактичным. Таким образом, в данном случае "хорошим" начальным приближением x_o является то, для которого выполнено неравенство

$$f(x_o)f''(x_o){>}0. \tag{4.8}$$

Практически следует вычислять x_n до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность ε. Как только будет обнаружено, что

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon,$$

в качестве приближённого решения уравнения (4.1) можно принять значение x_n.

4.4. Комбинированный метод хорд и касательных

Пусть $f(a)f(b)<0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ знакопостоянны на отрезке $[a,b]$. Соединяя метод хорд и метод касательных, получаем метод, на каждом этапе которого находим значения по недостатку и значения по избытку точного корня ξ уравнения (4.1).

Рассмотрим случай, когда $f(a)f''(a)>0$ (т.е. точка $A(a,f(a))$ является неподвижной в методе хорд и в этой точке проводятся касательные в методе касательных).

Проведём хорду AB и через b_1 обозначим абсциссу точки пересечения этой хорды с осью (Ox); при этом

$$b_1 = a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a).$$

Проведём в точке A касательную к графику функции $y=f(x)$ и через a_1 обозначим абсциссу точки пересечения этой касательной с осью (Ox); при этом

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Тем самым мы получили отрезок $[a_1,b_1]$, содержащий корень ξ уравнения (4.1).

Далее рассмотрим точку $B_1(b_1,f(b_1))$ и проведём хорду AB_1, получим b_2 – абсциссу точки пересечения этой хорды с осью (Ox), тогда

$$b_2 = b_1-\frac{b-b_1}{f(b)-f(b_1)}f(b_1).$$

В точке $A_1(a_1,f(a_1))$ проведём касательную к кривой $y=f(x)$ и получим a_2 – абсциссу точки пересечения этой касательной с осью (Ox), тогда

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Тем самым мы получили отрезок $[a_2,b_2]$, которому принадлежит значение ξ (рис. 5).

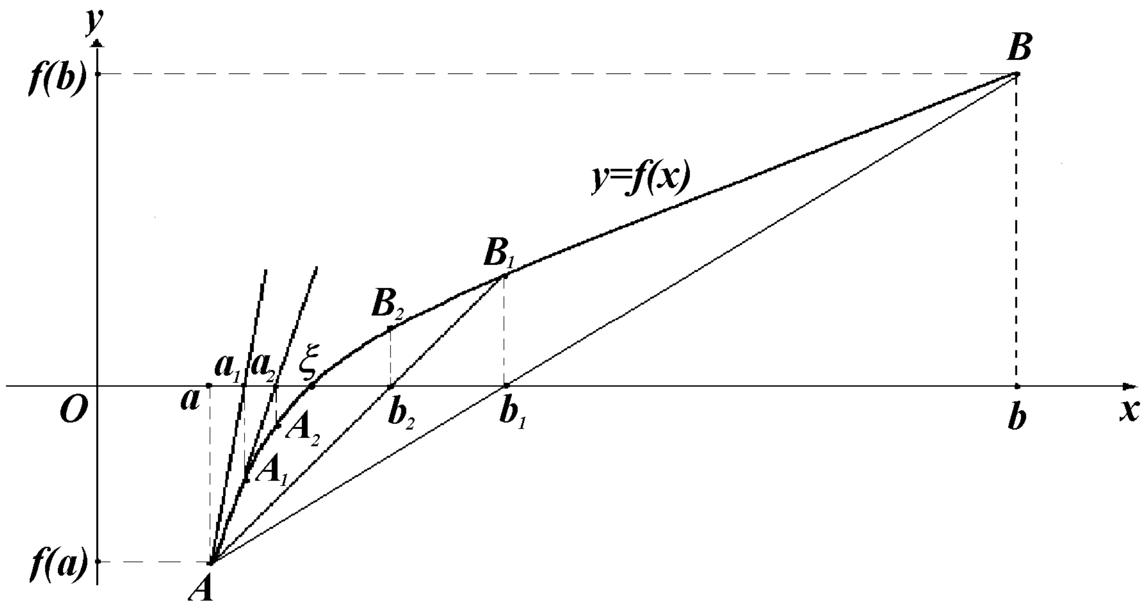

Рисунок 5.

Процесс построения отрезков $[a_n, b_n]$ сделует продолжать до тех пор, пока расстояние между вновь получившимися точками a_n и b_n не станет меньше заданной точности. Затем за корень уравнения (4.1) можно принять любую точку отрезка $[a_n, b_n]$.

Задания к лабораторной работе № 6

Для уравнения $f(x)$=0

1) отделить корни;

2) решить уравнение методами половинного деления, хорд и касательных, а также комбинированным методом хорд и касательных с точностью 10^{-3}.

Вариант	1	2	3
$f(x)$	$e^{2x}-\sin x+2$	$\ln x-\sin x-2,2$	$x^3-1,5x^2+0,68x-0,084$

Вариант	4	5	6
$f(x)$	$e^{2x+1}-\sin x-3$	$\sqrt{x}-\cos 0,387x$	$x^4+5x^3-(x+3)^2+1,68x$

Вариант	7	8	9
$f(x)$	$\mathrm{tg}\,(0,4x+0,4)-x^2-3$	$3x-e^{x-2}$	$x^3-x^2+1,68x-0,084$

Вариант	10	11	12
$f(x)$	$\lg\,(2+x)+2x^2-x-3$	$\lg x-\frac{7}{2x+6}$	$(e+2)^x-\cos x-5$

Вариант	13	14	15
$f(x)$	$\ln(2x) - \sin x - 2$	$e^x - x^2 + 7x - 8$	$(x+1)^2 + \lg(x+1) - 1,5$

Вариант	16	17	18
$f(x)$	$\ln x + x^2 + 3x + 6$	$0,5\sqrt{\sin x} + 2 - \ln 3x$	$(e+1)^{1,5x} - \sin x - 2,2$

Вариант	19	20	21
$f(x)$	$\ln 3,5x - 0,5\sqrt[3]{\sin x} - 2$	$\sin 0,5x + 2 - \ln 1,5x$	$2^{7x} + \cos x - 8$

Вариант	22	23	24	25
$f(x)$	$(x-1)^2 - 0,5e^x$	$x2^x - 1$	$x^3 + 7 - \cos x$	$(e-1)^{1,5x} - \cos x - 3,2$

4.5. Метод итераций

Пусть требуется решить уравнение (4.1). Заменим это уравнение равносильным ему уравнением

$$x = g(x), \tag{4.9}$$

где функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Суть метода итераций (метода последовательных приближений) состоит в следующем. Начиная с произвольной точки $x^{(o)}$, принадлежащей отрезку $[a, b]$, последовательно получаем

$$x^{(1)} = g(x^{(o)}) \qquad \text{(первое приближение)},$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)}) \qquad \text{(второе приближение)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \qquad \text{((k + 1) – е приближение)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Последовательность

$$x^{(o)},\ x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(k)},\ \ldots \tag{4.10}$$

называется **последовательностью итераций** для уравнения (4.9) с начальной точкой $x^{(o)}$. Если все точки последовательности (4.10) принадлежат отрезку $[a, b]$ и существует предел $\xi = \lim\limits_{x\to\infty} x^{(k)}$, то перейдя к пределу в равенстве

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{4.11}$$

получим $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x^{(k)})$, т.е. $\xi = g(\xi)$.

Следовательно, если существует предел последовательности итераций (4.10), то он является корнем уравнения (4.9). Достаточные условия сходимости последовательности итераций содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1 *Пусть функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную и выполнены следующие условия:*
1) $|g'(x)| \le q < 1$ при $x \in [a, b]$;
2) значения функции $y = g(x)$ принадлежат отрезку $[a, b]$ для любого $x \in [a, b]$.
Тогда при любом выборе начального приближения $x^{(o)} \in [a, b]$ процесс итераций сходится к единственному корню ξ уравнения (4.9) на отрезке $[a, b]$.

Оценка погрешности k–го приближения $x^{(k)}$ к корню ξ такова:

$$|\xi - x^{(k)}| \le \frac{q}{1-q} |x^{(k)} - x^{(k-1)}|,$$

где $q = \max\limits_{a \le x \le b} |g'(x)|$.

Следует указать один из способов преобразования уравнения (4.1) к виду (4.9), допускающему применение метода итераций, сходящихся к решению ξ заданного уравнения.

Для любого числа $\lambda \neq 0$ уравнение (4.1) равносильно уравнению (4.9), где $g(x) = x + \lambda f(x)$. Предположим, что производная $f'(x) > 0$ и непрерывна на $[a, b]$. Пусть $M = \max\limits_{a \le x \le b} f'(x)$, $m = \min\limits_{a \le x \le b} f'(x)$; положим $\lambda = -1/M$, $q = 1 - m/M$ и рассмотрим функцию

$$g(x) = x - \frac{1}{M} f(x). \tag{4.12}$$

Для функции, определённой формулой (4.12), выполняются достаточные условия сходимости метода итераций решения уравнения (4.1). В частности, первое условие теоремы 4.1 следует из неравенств

$$0 < m < f'(x) \le M,$$

$$0 \le g'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) \le 1 - \frac{m}{M} = q < 1 \;\; \forall x \in [a, b].$$

Замечания.

1. Если окажется, что производная $f'(x)$ отрицательна на отрезке $[a, b]$, то уравнение (4.9) можно заменить на равносильное уравнение $-f(x) = 0$ и использовать указанное преобразование.
2. Если вычисление точного значения числа M затруднительно, то можно заменить его произвольным числом $M_1 > M$. Однако при большом M_1

число $q=1-\ m/M_1$ ближе к единице и процесс итераций сходится медленнее.

3. При нахождении корня уравнения (4.9) с заданной точностью $\varepsilon>0$ или при оценке погрешности k–го приближения можно, не вычисляя точного значения числа q, ограничиться следующей практической рекомендацией:

$$|\xi - x^{(k)}| \le \begin{cases} |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \le \varepsilon \ \text{при}\ 0 < q \le \frac{1}{2}; \\ \\ 10|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \le \varepsilon \ \text{при}\ \frac{1}{2} < q < 1. \end{cases}$$

Задания к лабораторной работе № 7

Решить уравнение $f(x)=0$ методом итераций с точностью 10^{-3}. Аналитическое выражение функции $f(x)$ взять из задания к предыдущей лабораторной работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С. Численные методы, изд. 2-ое. / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.- С-П.: Физматлит, 2002.

2. Волков Е.А. Численные методы. / Е.А. Волков. – М.: Наука, 1987.

3. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики. / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1970.

4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. / Г.И.Марчук. – М.: Наука, 1980.

5. Ракитин В.И. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. / В.И. Ракитин, В.Е. Первушин. – М.: Высшая школа, 1998.