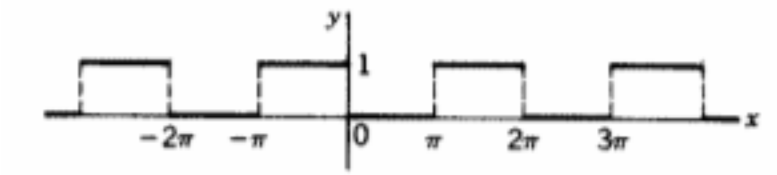
Дана функция на интервале $-\pi < x < \pi.$ Сделайте набросок нескольких периодов соответствующей периодичной ф-ии с периодом $2\pi.$ Разложить периодическую ф-ию в ряд Фурье по синусам-косинусам.
С помощью компьютера построить графики, показывающие Фурье приближение к ф-ям.

355:1

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

в этом случае график:



Ответ: $$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots\right).$$

355:3

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} \cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{2\sin 6x}{6} \cdots\right).$$

355:7

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$
$$+ \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

355:8

$$f(x) = 1 + x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Ответ:

$$f(x) = 1 + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right).$$

355:11

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right).$$

360:12

Показать, что если вещественная ф-ия $f(x)$ может быть разложена в комплексный экспоненциальный ряд Фурье $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, тогда $c_{-n} = \bar{c}_n$, где $\bar{c}_n$ - комплексное сопряженное для c_n.

363:11

Сделать набросок нескольких периодов ф-ии. Разложить в ряд Фурье по синусам-косинусам, и комплексно-экспоненциальный ряд Фурье.

(a) $f(x) = x^2, \; -\pi < x < \pi;$ (b) $f(x) = x^2, \; 0 < x < 2\pi.$

ответ:

(a) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

(b) $f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i\pi}{n}\right) e^{inx} = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

Каждая ф-ия дана для одного периода. Сделать набросок нескольких периодов ф-ии и определить четность. Использовать 9.4 или 9.5 для разложения в ряд Фурье.

$$\begin{cases} b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \\ a_n = 0. \end{cases}$$

9.4 Если f(x) нечетная

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

9.5 Если f(x) четная

370:6

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -l < x < 0, \\ 1, & 0 < x < l. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} + \cdots\right).$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

370:9

$$f(x) = x^2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}.$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2}\left(\cos 2\pi x - \frac{1}{2^2}\cos 4\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 6\pi x - \cdots\right).$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos 2n\pi x$$

370:11

$$f(x) = \cosh x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Ответ

$$f(x) = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x + \frac{1}{17}\cos 4x - \cdots\right).$$

$$f(x) = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx\right)$$

Используя теорему Парсеваля (унитарность преобразования Фурье) и ответы к указанным заданиям найти сумму рядов.

377:5

Используя 370:6

Найти сумму ряда:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

Ответ: $\pi^2/8$

377:6

Используя 370:9

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

Ответ: $\pi^4/90$

377:9

Используя 355:11

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{35^2}+\cdots,$$

Ответ $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$

Для заданной $f(x)$ записать экспоненциальное Фурье преобразование и записать $f(x)$ как Фурье интеграл (то есть найти $g(\alpha)$ в уравнении 12.2 и подставить в первый интеграл 12.2).
Уравнение 12.2:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha,$$
$$g(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx.$$

384:4

$$f(x)=\begin{cases}1, & \pi/2<|x|<\pi\\ 0, & \end{cases}$$

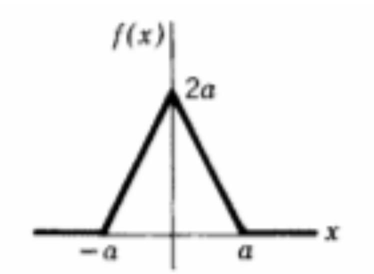
Ответ
$$.4\quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\pi-\sin(\alpha\pi/2)}{\alpha\pi}e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

384:7

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

Ответ
$$.7\quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha+\alpha\sin\alpha-1}{\pi\alpha^2}e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

384:9



Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i - \cos\alpha a}{\alpha^2} e^{i\alpha x}\, d\alpha$

384:14
384:15

Для 384:7, 384:9 разложить ф-ии в ряд Фурье по косинусам. Записать $f(x)$ как интеграл Фурье (используя 12.15)

Формула 12.15:

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g_c(x)\cos\alpha x\, d\alpha,$$
$$g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_c(x)\cos\alpha x\, dx.$$

Показать, что интеграл $f(x)$ для косинусов, такой же, как экспоненциальный интеграл найденный ранее для этих ф-ий.

Ответы:

$$f_c(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 1}{\alpha^2}\cos\alpha x\, d\alpha$$
$$f_c(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos\alpha a}{\alpha^2}\cos\alpha x\, d\alpha$$