Министерство общего и профессионального
образования Российской Федерации

Пермский государственный
технический университет

Кафедра автоматизированных
систем управления

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям
по курсу ИИС и АСУТП

Пермь 1999

Составители Б.С.Гаспер, И.Н.Липатов

УДК 681.3

Методические указания к практическим занятиям по курсу ИИС и АСУТП / Сост.: Б.С.Гаспер, И.Н.Липатов; Перм.гос.техн.ун-т.Пермь , 1999. 64 с.

Приводятся методические указания к 7 практическим занятиям по курсу ИИС и АСУТП. Каждое практическое занятие включает в себя краткие теоретические сведения, иллюстрируемые решением типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» дневного и заочного обучения.

Рецензент канд. техн. наук, доц. Р.А.Файзрахманов

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Теоретические сведения

Пусть $U(t)$ - непериодический сигнал. Запишем для сигнала $U(t)$ формулы для прямого и обратного преобразования Фурье. Имеем

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}U(t)\cdot e^{-j\omega t}dt, \qquad (1.1)$$

$$U(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (1.2)$$

Величину $S(j\omega)$ называют комплексной спектральной плотностью или спектральной характеристикой. Как комплексная величина спектральная характеристика может быть записана в виде

$$S(j\omega)=S(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}, \qquad (1.3)$$

где $S(\omega)=|S(j\omega)|$ - спектральная плотность амплитуд или спектр непериодического сигнала $U(t)$; $\varphi(\omega)$- фаза спектральной характеристики $S(j\omega)$.

Спектр непериодического сигнала является непрерывным или сплошным. Представим спектральную характеристику, состоящую из действительной и мнимой частей:

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}U(t)\cos\omega t\,dt-j\int_{-\infty}^{+\infty}U(t)\sin\omega t\,dt=A(\omega)-jB(\omega), \qquad (1.4)$$

где $$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}U(t)\cos\omega t\,dt, \qquad (1.5)$$

$$B(\omega)=j\int_{-\infty}^{+\infty}U(t)\sin\omega t\,dt. \qquad (1.6)$$

Модуль спектральной характеристики $S(\omega)$определяется выражением

$$S(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}. \qquad (1.7)$$

Для фазы спектральной характеристики $S(j\omega)$ соответственно получаем

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \qquad (1.8)$$

Так как из (1.5) и (1.6) следует, что $A(\omega)$- четная функция частоты, а $B(\omega)$- нечетная, то функция $\varphi(\omega)$ относительно частоты нечетна.

Комплексная форма интегрального преобразования Фурье легко приводится к тригонометрической:

$$U(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j[\omega t-\varphi(\omega)]}d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\cos[\omega t-\varphi(\omega)]d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\sin[\omega t-\varphi(\omega)]d\omega.$$

Второй член в связи с нечетностью подынтегрального выражения равен нулю.

Окончательно имеем

$$U(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S(\omega)\cos[\omega t-\varphi(\omega)]d\omega. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) есть тригонометрическая форма записи Фурье-преобразования.

Для сигналов $U(t)$ любой формы справедливо свойство сокращения ширины спектра при увеличении его длительности и наоборот.

Рассмотрим функцию $U(t)$определенной продолжительности и функцию $U(\lambda t)$, длительность которой при $\lambda>1$ будет в λ раз меньше. Считая, что $U(t)$ имеет спектральную характеристику $S(j\omega)$, найдем соответствующую характеристику $S_{\lambda}(j\omega)$ для $U(\lambda t)$:

$$S_{\lambda}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}U(t')e^{-j\frac{\omega t'}{\lambda}}dt'=\frac{1}{\lambda}S\left(j\frac{\omega}{\lambda}\right), \quad (1.10)$$

где $t'=\lambda t$.

Следовательно, спектр укороченного в λ раз сигнала ровно в λ раз шире. Коэффициент $1/\lambda$ перед $S\left(j\omega/\lambda\right)$ изменяет только амплитуду гармонических составляющих и на ширину спектра не влияет.

Другой важный вывод, также являющийся прямым следствием Фурье-преобразования, заключается в том, что длительность сигнала и ширина его спектра не могут быть одновременно ограничены конечными интервалами: если длительность сигнала ограничена, то спектр его неограничен, и, наоборот, сигнал с ограниченным спектром длится бесконечно долго.

Реальные сигналы ограничены во времени, генерируются и передаются устройствами, содержащими инерционные элементы (например, емкости и индуктивности в электрических цепях), и поэтому не могут содержать гармонические составляющие сколь угодно высоких частот. В связи с этим возникает необходимость ввести в рассмотрение модели сигналов, обладающие как конечной длительностью, так и ограниченным спектром. При этом в соответствии с каким-либо критерием дополнительно ограничивается либо ширина спектра, либо длительность сигнала, либо оба параметра одновременно. В качестве такого критерия используется энергетический критерий, согласно которому практическую длительность T_n и практическую ширину спектра $\omega_п$ выбирают так, чтобы в них была сосредоточена подавляющая часть энергии сигнала.

Для сигналов, начинающихся в момент времени $t_0=0$, практическая длительность определяется из соотношения

$$\int_{0}^{T_n}[U(t)]^2dt=\eta\int_{0}^{\infty}[U(t)]^2dt, \quad (1.11)$$

где η- коэффициент, достаточно близкий к 1 (от 0,9 до 0,99 в зависимости от требований к качеству воспроизведения сигнала).

Для сигнала $U(t)$ справедливо равенство Парсеваля вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}U^2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[S(\omega)]^2d\omega. \quad (1.12)$$

Принимая во внимание равенство Парсеваля (1.12), для практической ширины спектра сигнала соответственно имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_n}[S(\omega)]^2d\omega=\frac{\eta}{\pi}\int_{0}^{\infty}[S(\omega)]^2d\omega. \quad (1.13)$$

В информационно-измерительных системах функция $U(t)$ непрерывного времени подвергается дискретизации. Широкое распространение получили методы дискретизации, при которых сигнал $U(t)$ заменяется совокупностью его мгновенных значений $U\left(t_j\right)$, взятых в определенные моменты времени $t_j(j=1,2....,N)$ и называемых выборками или отсчетами. Отрезок времени $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ между соседними выборками называют шагом дискретизации. Если он выдерживается постоянным во всем диапазоне преобразования, дискретизация считается равномерной. Методы равномерной дискретизации получили широкое применение.

Правило выбора предельного (максимального) шага дискретизации Δt при равномерной дискретизации с использованием модели сигнала с ограниченным спектром в наиболее четкой форме сформулировано и доказано акад. В.А. Котельниковым в виде теоремы, получившей в отечественной литературе его имя.

Теорема Котельникова формулируется следующим образом: функция $U(t)$, допускающая преобразование Фурье и имеющая непрерывный спектр, ограниченный полосой частот от 0 до ω_n, полностью определяется дискретным рядом своих мгновенных значений, отсчитанных через интервал времени

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_n}\ . \tag{1.14}$$

Решение типовых задач

Задача 1.1. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t) = \begin{cases} 2e^{-t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с η=*0,95*.

Решение. По формуле (1.1) находим спектральную характеристику. Имеем

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-j\omega t}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt = \frac{-2}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = -\frac{2}{1+j\omega}e^{-t}(\cos\omega t - j\sin\omega t)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{2}{1+j\omega}.$$

Определим спектр $S(\omega)$ сигнала $U(t)$. Имеем

$$S(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega} = \frac{2(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{2-j2\omega}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{2}{1+\omega^2} - j\frac{2\omega}{1+\omega^2} = A(\omega) - jB(\omega),$$

где $A(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}; B(\omega) = \dfrac{2\omega}{1+\omega^2}$.

Определим модуль спектральной характеристики $S(\omega)$ по формуле (1.7). Получим

$$S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)} = \sqrt{\frac{4}{(1+\omega^2)^2} + \frac{4\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Определим практическую ширину спектра ω_n, пользуясь соотношением (1.13). Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_n}\frac{4}{1+\omega^2}d\omega = \frac{0{,}95}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{4}{1+\omega^2}d\omega. \tag{1.15}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega = arctg\omega\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\omega_n}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega = arctg\omega\Big|_0^{\omega_n} = arctg\omega_n - 0 = arctg\omega_n.$$

Из (1.15) получим

$$arctg\omega_n = 0{,}95\frac{\pi}{2} = 1{,}49. \tag{1.16}$$

Из (1.16) имеем

$$\omega_n = 13{,}1\left[1/c\right].$$

По формуле (1.14) получим

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{3{,}14}{13{,}1} = 0{,}24\quad c.$$

Задача 1.2. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t)=\begin{cases} te^{-\alpha t}, t\ge 0\\ 0, t<0,\end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta=0,95$.

Решение. Выпишем интегралы, которые будут использоваться при решении этой задачи:

$$\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1), \qquad (1.17)$$

$$\int \frac{dx}{X^2}=\frac{x}{2a^2X}+\frac{1}{2a^3}Y, \qquad (1.18)$$

где $X=a^2+x^2; Y=arctg\frac{x}{a}$. (1.19)

По формуле (1.1) находим спектральную характеристику.

Имеем

$$S(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{0}^{\infty}te^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{0}^{\infty}te^{-(\alpha+j\omega)t}dt=$$

$$=\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{(\alpha+j\omega)^2}\left[-(\alpha+j\omega)t-1\right]\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}\cdot\frac{\left[-(\alpha+j\omega)t-1\right]}{e^{\alpha t}\left[\cos\omega t+j\sin\omega t\right]}\Big|_0^{\infty}.$$

Из полученного соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}\cdot\frac{\left[-(\alpha+j\omega)t-1\right]}{e^{\alpha t}\left[\cos\omega t+j\sin\omega t\right]}\right\}=-\frac{\infty}{\infty},$$

т.е. при $t=\infty$ имеем неопределенность. Для устранения неопределенности используем правило Лопиталя. Необходимо взять производную по t от числителя и знаменателя и в полученном выражении устремить t к ∞. Имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}\cdot\frac{\left[-(\alpha+j\omega)t-1\right]}{e^{\alpha t}\left[\cos\omega t+j\sin\omega t\right]}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{-(\alpha+j\omega)}{(\alpha+j\omega)^3e^{(\alpha+j\omega)t}}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{-1}{(\alpha+j\omega)^2e^{\alpha t}\left[\cos\omega t+j\sin\omega t\right]}\right\}=\frac{-1}{\infty}=0.$$

Окончательно получим

$$S(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}.$$

Преобразуем полученное выражение.

$$S(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)(\alpha+j\omega)}=\frac{(\alpha-j\omega)(\alpha-j\omega)}{(\alpha+j\omega)(\alpha+j\omega)(\alpha-j\omega)(\alpha-j\omega)}=$$

$$=\frac{(\alpha-j\omega)^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)\left(\alpha^2+\omega^2\right)}=\frac{\left(\alpha^2-\omega^2\right)-j2\alpha\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}$$

или $S(j\omega)=A(\omega)-jB(\omega)$,

где $(1+\omega^2)^2\ A(\omega)=\dfrac{\alpha^2-\omega^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2};B(\omega)=\dfrac{2\alpha\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}.$

Определим модуль спектральной характеристики $S(\omega)$ по формуле (1.7). Получим

$$S(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\sqrt{\frac{\left(\alpha^2-\omega^2\right)^2+4\alpha^2\omega^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^4}}=$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^4-2\alpha^2\omega^2+\omega^4+4\alpha^2\omega^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^4}}=\sqrt{\frac{\alpha^4+2\alpha^2\omega^2+\omega^4}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^4}}=$$

$$\sqrt{\frac{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^4}}=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

Определим практическую ширину спектра ω_n, пользуясь соотношением (1.13).

Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\omega_n}\left[S(\omega)\right]^2d\omega=\frac{\eta}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[S(\omega)\right]^2d\omega$$

или $J_1=J_2$,

где $J_1 = \int\limits_0^{\omega_n} S^2(\omega)d\omega; J_2 = \eta\int\limits_0^{\infty} S^2(\omega)d\omega.$ (1.20)

Подставим $S(\omega)$ в (1.20). Получим

$$J_1 = \int\limits_0^{\omega_n} \frac{d\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2} = \frac{\omega}{2\alpha^2\left(\omega^2+\alpha^2\right)}\Bigg|_0^{\omega_n} + \frac{1}{2\alpha^3} arctg\frac{\omega}{\alpha}\Bigg|_0^{\omega_n} =$$

$$= \frac{\omega_n}{2\alpha^2\left(\omega_n{}^2+\alpha^2\right)} + \frac{1}{2\alpha^3} arctg\frac{\omega_n}{\alpha};$$

Определим J_2. Имеем

$$J_2 = \eta\int\limits_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2} = \eta\left[\frac{\omega}{2\alpha^2\left(\omega^2+\alpha^2\right)}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2\alpha^3} arctg\frac{\omega}{\alpha}\Bigg|_0^{\infty}\right];$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega}{2\alpha^2\left(\alpha^2+\omega^2\right)} = \frac{\infty}{\infty};$$

Используем правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega}{2\alpha^2\left(\alpha^2+\omega^2\right)} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{4\alpha^2\omega} = 0.$$

Тогда интеграл J_2 примет вид

$$J_2 = \eta\frac{1}{2\alpha^3}\frac{\pi}{2},$$

т.к. $arctg\infty = \frac{\pi}{2}; arctg0 = 0$.

Окончательно получим

$$\frac{\omega_n}{2\alpha^2\left(\omega_n{}^2+\alpha^2\right)} + \frac{1}{2\alpha^3} arctg\frac{\omega_n}{\alpha} = \eta\frac{1}{2\alpha^3}\frac{\pi}{2}. \qquad (1.21)$$

Ширина спектра ω_n определяется из уравнения (1.21) численным методом с использованием ЭВМ. Если решать уравнение (1.21) вручную, то надо подобрать такое значение ω_n, чтобы левая часть уравнения (1.21) была приблизительно

равна правой части уравнения (1.21). Например, при $\omega_n = 1{,}5$ получаем уравнение (1.21) в виде 1,5≈1,49.

Следовательно,

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_n} \approx \frac{3{,}14}{1{,}5} = 2{,}1\ c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.3. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, t \ge 0 \\ e^{\alpha t}\ \ , t < 0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta = 0{,}95$.

Задача 1.4. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}, t \ge 0 \\ 0 \qquad\qquad , t < 0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta = 0{,}95$.

Задача 1.5. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t) = \begin{cases} e^{-t}\sin t, t \ge 0 \\ 0 \qquad\quad , t < 0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta = 0{,}95$.

Задача 1.6. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\sin t; \alpha > 0, t \ge 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , t < 0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta = 0{,}95$.

Задача 1.7. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t)=\begin{cases} t^2e^{-\alpha t}, t\geq 0 \\ 0 \quad ,t<0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta=0{,}95$.

Задача 1.8. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}\cos t; \alpha>0, t\geq 0 \\ 0 \quad ,t<0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta=0{,}95$.

Задача 1.9. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}(1+\alpha t); \alpha>0, t\geq 0 \\ 0 \quad ,t<0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta=0{,}95$.

Задача 1.10. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t)=\frac{1}{1+t^2},$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta=0{,}95$.

Известно, что $S(\omega)=\pi\ e^{-|\omega|}$.

Задача 1.11. Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$U(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}(1-\alpha t); \alpha>0, t\geq 0 \\ 0 \ ,t<0 \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра (1.13) с $\eta=0{,}95$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ДАТЧИКОМ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Рассмотрим схему на рис. 2.1.

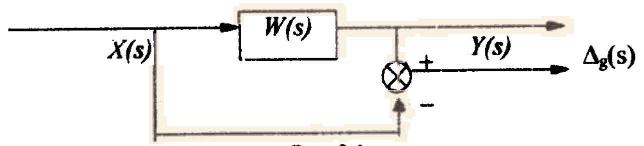

Рис. 2.1

Здесь $W(s)$ – передаточная функция датчика (измерительного элемента) ; $X(s)$ – изображение по Лапласу измеряемого сигнала ; $Y(s)$ –изображение по Лапласу сигнала на выходе датчика; $\Delta_g(s)$ – изображение по Лапласу динамической погрешности измерения датчиком детерминированного сигнала $X(t)$. Таким образом , $X(s)=L\{X(t)\}$; $Y(s)=L\{Y(t)\}$; $\Delta_g(s)=L\{\Delta_g(t)\}$, где $L\{...\}$- преобразование Лапласа выражения ,стоящего в скобках ; $Y(t)$ – сигнал на выходе датчика ; $\Delta_g(t)$ – динамическая погрешность измерения датчиком детерминированного сигнала $X(t)$.

Погрешность $\Delta_g(t)$ определяется по формуле

$$\Delta_g(t)=L^{-1}\{\Delta_g(s)\};$$

$$\Delta_g(s)=[W(s)-1]X(s),$$

где $L^{-1}\{...\}$ – обратное преобразование Лапласа выражения, стоящего в скобках .

Решение типовых задач

Задача 2.1. Дано:

$$W(s)=\frac{1}{Ts+1}; X(t)=A\cdot 1(t); A=const.$$

$$1(T)=\begin{cases} 1, t\geq 0 \\ 0, t\langle 0. \end{cases}$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Решение . Определим X(s) . Имеем

$$X(s)=L\{A\cdot 1(t)\}=\frac{A}{s};$$

Определим W(s)-1 . Получим

$$W(s)-1=\frac{1}{Ts+1}-1=\frac{-Ts}{Ts+1}.$$

Находим $\Delta_g(s)$. Имеем

$$\Delta_g(s)=\frac{-Ts}{Ts+1}\cdot\frac{A}{s}=-\frac{AT}{Ts+1}$$

или $\Delta_g(s)=-\dfrac{A}{s+\frac{1}{T}}$;

Определим $\Delta_g(t)$. Получим

$$\Delta_g(t)=L^{-1}\left\{-\frac{A}{s+1/T}\right\}=-A\cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Задача 2.2. Дано

$$W(s)=\frac{1}{Ts+1};X(t)=At^2;A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Решение. Определим X(s) . Имеем , используя таблицы преобразования Лапласа

$$X(s)=L\left\{At^2\right\}=\frac{2A}{s^3}.$$

Определим W(s)-1 . Получим

$$W(s)-1=\frac{-Ts}{Ts+1}.$$

Находим $\Delta_g(s)$. Имеем

$$\Delta_g(s)=-\frac{Ts}{Ts+1}\cdot\frac{2A}{s}=-\frac{2AT}{s^2(Ts+1)}.$$

Полученное выражение представим в виде

$$\frac{-2AT}{s^2(Ts+1)}=\frac{A_1}{s^2}+\frac{A_2}{s}+\frac{A_3}{Ts+1}$$

или

$$\frac{-2AT}{s^2(Ts+1)}=\frac{A_1+(A_1T+A_2)s+(A_3+A_2T)s^2}{s^2(Ts+1)}.$$

В полученном выражении приравниваем члены при s^2 , s , s^0 . Имеем

$$\left.\begin{aligned}&A_1=-2AT;\\&A_1T+A_2=0;\\&A_3+A_2T=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая полученную систему уравнений относительно A_1, A_2, A_3 , имеем

A_1= - 2AT ;

A_2= $2AT^2$;

A_3= - $2AT^3$.

Следовательно

$$\Delta_g(s)=\frac{A_1}{s^2}+\frac{A_2}{s}+\frac{A_3}{Ts+1}=\frac{-2AT}{s^2}+\frac{2AT^2}{s}-\frac{2AT^3}{Ts+1}$$

или $\Delta_g(s)=\dfrac{-2AT}{s^2}+\dfrac{2AT^2}{s}-\dfrac{2AT^2}{s+1/T}.$

Определим $\Delta_g(t)$. Получим

$$\Delta_g(t)=L^{-1}\{\Delta_g(s)\}=-2ATt+2AT^2\cdot 1(t)-2AT^2\cdot e^{-t/T}.$$

Так как $t\geq 0$, то 1(t) =1. Окончательно получено:

$$\Delta_g(t)=2AT\left[T\left(1-e^{-t/T}\right)-t\right].$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3. Дано

$$W(s)=\frac{1}{Ts+1};X(t)=A\cdot t;A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.4. Дано

$$W(s)=\frac{1}{Ts+1};X(t)=A\cdot e^{-\beta t};A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.5. Дано

$$W(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)};\ X(t)=A\cdot e^{-kt};\ A=const\ .$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.6. Дано

$$W(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)};X(t)=e^{-k_1t}+e^{-k_2t}.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.7. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s+a};X(t)=e^{-ct}+e^{-bt}.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.8. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s+a};X(t)=At^2;A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.9. Дано

$$W(s)=\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)};X(t)=A\cdot 1(t);A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.10. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s^2+\omega^2};X(t)=A\cdot 1(t);A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.11. Дано

$$W(s)=\frac{s+k}{(s+\alpha)^2};X(t)=A\cdot 1(t);A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.12. Дано

$$W(s)=\frac{1}{(s+\alpha)^2};X(t)=A\cdot 1(t);A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.13. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s+\alpha};X(t)=A\cdot t;A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.14. Дано

$$W(s)=\frac{s+k}{(s+\alpha)(s+\beta)};X(t)=Ae^{-\alpha t};A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.15. Дано

$$W(s)=\frac{s+k}{(s+\beta)(s+\gamma)};X(t)=A\cdot e^{-\alpha t};A=const\ .$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.16. Дано

$$W(s)=\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)};X(t)=A\cdot e^{-\alpha t};A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.17. Дано

$$W(s)=\frac{1}{(s+\beta)(s+\gamma)};X(t)=A\cdot e^{-\alpha t};A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.18. Дано

$$W(s)=\frac{s+k}{(s+\alpha)(s+\beta)};X(t)=A\cdot 1(t);A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.19. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s^2+\omega^2};X(t)=A\cdot t;A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.20. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s^2+\omega^2};X(t)=\frac{A}{\omega}\sin\omega t;A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.21. Дано

$$W(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2};\ X(t)=\frac{A}{\omega}\sin\omega t;\ A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.22. Дано

$$W(s)=\frac{1}{s+\gamma};\ X(t)=A\cdot\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha};\ A=const$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.23. Дано

$$W(s)=\frac{s+k}{s+\beta};\ X(t)=A\cdot e^{-\alpha t};\ A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.24. Дано

$$W(s)=\frac{s+k}{s+\alpha};\ X(t)=A\cdot e^{-\alpha t};\ A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.25. Дано

$$W(s)=\frac{s}{s^2+\nu^2};\ X(t)=\frac{A}{\omega}\sin\omega t;\ A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.26. Дано

$$W(s)=\frac{s^2}{s^2+\omega^2};\ X(t)=\frac{A}{\omega}\sin\omega t;\ A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

Задача 2.27. Дано

$$W(s)=\frac{s^2-\omega^2}{s^2+\omega^2};\ X(t)=\frac{A}{\omega}\sin\omega t;\ A=const.$$

Определить $\Delta_g(t)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ДАТЧИКОМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Рассмотрим схему на рис. 3.1.

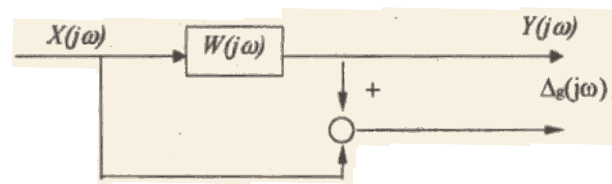

Рис. 3.1

Здесь $W(j\omega)$ – частотная характеристика датчика (измерительного элемента); $X(j\omega)$ – преобразование Фурье измеряемого сигнала; $Y(j\omega)$ – преобразование Фурье сигнала на выходе датчика; $\Delta_g(j\omega)$ – преобразование Фурье динамической погрешности измерения датчиком случайного сигнала $X(t)$. Таким образом, $X(j\omega)=F\{X(t)\}$; $Y(j\omega)=F\{Y(t)\}$; $\Delta_g(j\omega)=F\{\Delta_g(t)\}$, где $F\{\ldots\}$ – преобразование Фурье выражения, стоящего в скобках; $Y(t)$ – сигнал на выходе датчика; $\Delta_g(t)$ – динамическая погрешность измерения датчиком случайного сигнала $X(t)$.

Схему на рисунке 3.1 преобразуем к виду (рис. 3.2).

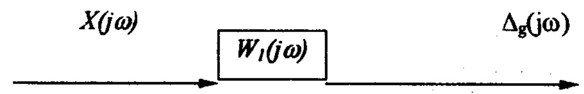

Рис. 3.2

Здесь

$$W1(j\omega)=W(j\omega)-1; \qquad (3.1)$$

$$\Delta_g(j\omega)=W_1(j\omega)X(j\omega). \qquad (3.2)$$

Из рисунка 3.2 имеем

$$S_{\Delta_g}(\omega)=\left|W_1(j\omega)\right|^2\cdot S_x(\omega), \qquad (3.3)$$

где $S_x(\omega)$ – спектральная плотность случайного процесса X(t); $S_{\Delta_g}(\omega)$ – спектральная плотность погрешности $\Delta_g(t)$; $\left|W_1(j\omega)\right|^2=W_1(j\omega)W_1(-j\omega)$.

Дисперсия погрешности $\Delta_g(t)$ определяется соотношением

$$D_{\Delta_g}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\Delta_g}(\omega)d\omega. \qquad (3.4)$$

Решение типовых задач

Задача 3.1. Дано

$$W(s)=\frac{1}{Ts+1};S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить $D_{\Delta g}$.

Решение. Определим *W(jω)*. Имеем

$$W(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{Tj\omega+1}.$$

Определим $W_1(j\omega)$. Получим

$$W_1(j\omega)=W(j\omega)-1=\frac{-jT\omega}{jT\omega+1}.$$

Представим $S_x(\omega)$ в виде

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{j\omega+\alpha}\cdot\frac{1}{-j\omega+\alpha}.$$

Соотношение (3.4) с учетом (3.3) примет вид

$$D_{\Delta_g}=\frac{2D_x\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-jT\omega}{jT\omega+1}\cdot\frac{jT\omega}{-jT\omega+1}\cdot\frac{1}{j\omega+\alpha}\cdot\frac{1}{-j\omega+\alpha}d\omega=$$

$$=2D_x\alpha\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-T^2(j\omega)^2}{[(jT\omega+1)(j\omega+\alpha)][T(-j\omega)+1](-j\omega+\alpha)}d\omega$$

или

$$D_{\Delta_g}=2D_x\alpha\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-T^2(j\omega)^2}{[T(j\omega)^2+(T\alpha+1)(j\omega)+\alpha][T(-j\omega)^2+(T\alpha+1)(-j\omega)+\alpha]}d\omega \qquad (3.5)$$

Запишем полученное соотношение в виде

$$D_{\Delta_g}=2D_x\alpha\cdot J_2,$$

где
$$J_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(j\omega)^2+g_1}{\left[h_0(j\omega)^2+h_1(j\omega)+h_2\right]\left[h_0(-j\omega)^2+h_1(-j\omega)+h_2\right]}d\omega \qquad (3.6)$$

Соотношение (3.6) описывает стандартный интеграл порядка n=2. Общее выражение для стандартного интеграла порядка n имеет вид

$$J_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(j\omega)^{2n-2}+g_1(j\omega)^{2n-4}+....+g_{n-1}}{\left[h_0(j\omega)^n+h_1(j\omega)^{n-1}+....+h_n\right]\left[h_0(-j\omega)^n+h_1(-j\omega)^{n-1}+....+h_n\right]}d\omega.$$

Интеграл J_n при n=1,2,3 определяется соотношениями

$$J_1=\frac{g_0}{2h_0h_1}; \qquad (3.7)$$

$$J_2=\frac{-g_0+\frac{h_0}{h_2}g_1}{2h_0h_1}; \qquad (3.8)$$

$$J_3=\frac{-h_2g_0+h_0g_1-\frac{h_0h_1g_2}{h_3}}{2h_0(h_0h_3-h_1h_2)}. \qquad (3.9)$$

Сопоставляя (3.5) и (3.6), получим

$$\left.\begin{array}{l}h_0=T;h_1=T\alpha+1;h_2=\alpha;\\ g_0=-T^2;g_1=0.\end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

Подставим (3.10) в (3.8). Имеем

$$J_2 = \frac{T}{2(T\alpha+1)}.$$

Окончательно получим

$$D_{\Delta_g} = 2D_x\alpha \cdot J_2 = D_x\frac{T\alpha}{T\alpha+1}. \qquad (3.11)$$

Соотношение (3.11) характеризует дисперсию $D_{\Delta g}$ погрешности $\Delta_g(t)$, где $\Delta_g(t)$ – динамическая погрешность измерения датчиком случайного процесса X(t).

Из (3.11) имеем

$$\sigma_{\Delta_g} = \sqrt{D_{\Delta_g}} = \sqrt{D_x\frac{T\alpha}{T\alpha+1}}, \qquad (3.12)$$

где σ_{Δ_g} – среднеквадратическое значение погрешности $\Delta_g(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.2. Дано

$$W(j\omega) = \frac{1}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega)+1};$$

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.3. Дано

$$W(j\omega) = T(j\omega)+1;$$

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^3}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.4. Дано

$$W(j\omega) = a(j\omega)^2 + b(j\omega)+c;$$

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^3}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.5. Дано

$$W(j\omega) = \frac{}{T\cdot j\omega+1},$$

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x\alpha(b_1^2\omega^2+b_0^2)}{(a_1^2\omega^2+a_0^2)(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.6. Дано

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega+1};$$

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{\omega^2+\alpha^2}{\left[(j\omega)^2+2\alpha\cdot(j\omega)+b^2\right]\left[(-j\omega)^2+2\alpha\cdot(-j\omega)+b^2\right]};$$

где $b^2 = \alpha^2+\beta^2$.

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.7. Дано

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{T\cdot j\omega+1};$$

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.8. Дано

$$W(j\omega) = \frac{T_1\cdot(j\omega)+1}{T_2\cdot(j\omega)+1};$$

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.9. Дано

$$W(j\omega) = \frac{1}{T_1T_2(j\omega)^2+(T_1+T_2)(j\omega)+1};$$

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.10. Дано

$$W(j\omega)=\frac{4j\omega+1}{3j\omega+1};$$

$$S_x(\omega)=\frac{12}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+4)^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.11. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1};$$

$$S_x(\omega)=\frac{\omega^2+b^2}{\left[(j\omega)^2+2\alpha\cdot(j\omega)+b^2\right]\left[(-j\omega)^2+2\alpha\cdot(-j\omega)+b^2\right]};$$

где $b^2=\alpha^2+\beta^2$.

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.12. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)^2+j\omega+1};$$

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.13. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T_1(j\omega)^2+j\omega+k};$$

$$S_x(\omega)=\frac{2TD_x}{1+\omega^2T^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.14. Дано

$$W(j\omega)=\frac{n^2}{(j\omega)^2+2h(j\omega)+n^2};$$

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.15. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1};$$

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.16. Дано

$$W(j\omega)=\frac{j\omega(Tj\omega+1)}{T(j\omega)^2+j\omega+k};$$

$$S_x(\omega)=\frac{D_xT_g}{\pi}\cdot\frac{1}{T_g^2\omega^2+1}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

Задача 3.17. Дано

$$W(j\omega)=\frac{T(j\omega)^2+j\omega}{T(j\omega)^2+j\omega+k};$$

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)}.$$

Определить дисперсию $D_{\Delta g}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Теоретические сведения

Рассмотрим схему на рис. 4.1.

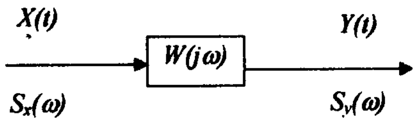

Рис. 4.1

Здесь $W(j\omega)$ – частотная характеристика динамического объекта; $X(t)$ – случайный стационарный сигнал на входе объекта; $Y(t)$ - случайный стационарный сигнал на выходе объекта; $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ – спектральные плотности сигналов $X(t)$ и $Y(t)$.

Первый способ решения задачи статистической идентификации динамического объекта заключается в следующем. Известны вероятностные характеристики случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$, например их спектральные плотности $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$. Требуется определить частотную характеристику $W(j\omega)$, передаточную функцию $W(s)$ динамического объекта. Кроме того, требуется определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Известно, что спектральные плотности $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ связаны соотношением

$$S_y(\omega)=|W(j\omega)|^2\cdot S_x(\omega), \qquad (4.1)$$

где $|W(j\omega)|^2$ - квадрат модуля частотной характеристики.

Из соотношения (4.1) имеем

$$|W(j\omega)|^2=\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)}, \qquad (4.2)$$

где $|W(j\omega)|^2=W(j\omega)\cdot W(-j\omega)$. (4.3)

Из соотношений (4.2), (4.3) получим

$$W(j\omega)\cdot W(-j\omega)=\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)}, \qquad (4.4)$$

С использованием формулы (4.4.) определяется $W(j\omega)$.

Передаточная функция $W(s)$ определяется соотношением

$$W(s)=W(j\omega)\big|_{j\omega=s}. \qquad (4.5)$$

Введем оператор дифференцирования $p\equiv\frac{d}{dt}$. Заменяя s на p, получим

$$W(p)=\frac{Y(t)}{X(t)} \qquad (4.6)$$

или $Y(t)=W(p)X(t)$, (4.7)

Из соотношений (4.6) или (4.7) определяем дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Второй способ решения задачи статистической идентификации динамического объекта заключается в использовании формулы

$$W(j\omega)=\frac{S_{yx}(\omega)}{S_x(\omega)}, \qquad (4.8)$$

где $S_{yx}(\omega)$ –взаимная спектральная плотность случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$.

Рассмотрим третий способ решения задачи статистической идентификации динамического объекта (способ Райбмана). Пусть $K_x(t)$ – корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ на входе объекта; $K_{yx}(t)$ - взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$. Представим $K_x(t)$ и $K_{yx}(t)$ в виде

$$K_x(t)=\begin{cases}K_x^+(t), t\ge 0\\ K_x^-(t), t<0\end{cases} \qquad (4.9)$$

$$K_{yx}(t)=\begin{cases}K_{yx}^+(t), t\ge 0\\ K_{yx}^-(t), t<0\end{cases} \qquad (4.10)$$

Тогда передаточная функция $W(s)$ динамического объекта будет определяться соотношением

$$W(s)=\frac{K_{yx}^+(s)-K_{yx}^-(s)}{K_x^+(s)-K_x^-(s)}, \qquad (4.11)$$

где $K_{yx}^{+}(s)=L\{K_{yx}^{+}(t)\}$, $K_{yx}^{-}(s)=L\{K_{yx}^{-}(t)\}$,
$K_{x}^{+}(s)=L\{K_{x}^{+}(t)\}$, $K_{x}^{-}(s)=L\{K_{x}^{-}(t)\}$. (4.12)

Здесь $L\{...\}$ – преобразование Лапласа выражения в фигурных скобках.

Решение типовых задач

Задача 4.1. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};S_y(\omega)=\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)$ = ?

2) $W(s)$ = ?

3) Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Решение. Из (4.4) имеем

$$W(j\omega)\cdot W(-j\omega)=\frac{4\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$W(j\omega)\cdot W(-j\omega)=\frac{\sqrt{4\sigma_x^2\alpha}}{j\omega+\alpha}\cdot\frac{\sqrt{4\sigma_x^2\alpha}}{-j\omega+\alpha},$$

откуда

$$W(j\omega)=\frac{\sqrt{4\sigma_x^2\alpha}}{j\omega+\alpha}\cdot=\frac{2\sigma_x\sqrt{\alpha}}{j\omega+\alpha}.$$

Определим $W(s)$. Получим

$$W(s)=W(j\omega)\big|_{j\omega=s}=\frac{2\sigma_x\sqrt{\alpha}}{s+\alpha}.$$

Определим $W(p)$. Имеем

$$W(p)=W(s)\big|_{s=p}=\frac{2\sigma_x\sqrt{\alpha}}{p+\alpha}.$$

Из (4.6) получим

$$W(p)=\frac{Y(t)}{X(t)}=\frac{2\sigma_x\sqrt{\alpha}}{p+\alpha}$$

или $(p+\alpha)Y(t)=2\sigma_x\sqrt{\alpha}\cdot X(t)$.

Так как $p\cdot Y(t)=\frac{dY(t)}{dt}$, то окончательно имеем

$$\frac{dY(t)}{dt}+\alpha Y(t)=2\sigma_x\sqrt{\alpha}\cdot X(t). \qquad (4.13)$$

Соотношение (4.13) есть искомое дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.2. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{A\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha^2+\omega^2};$$

$$S_{yx}(\omega)=B\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha-j\omega)(\beta+j\omega)}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)$ = ?

2) $W(s)$ = ?

3) Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Решение. Запишем $S_x(\omega)$ в виде

$$S_x(\omega)=\frac{A\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha+j\omega)(\alpha-j\omega)}.$$

Тогда соотношение (4.8.) примет вид

$$W(j\omega)=\frac{B\frac{\alpha+\beta}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha-j\omega)(\beta+j\omega)}}{\frac{A\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha+j\omega)(\alpha-j\omega)}}$$

или $W(j\omega)=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{\alpha+j\omega}{\beta+j\omega}$.

Определим $W(s)$. Получим

$$W(s)=W(j\omega)\big|_{j\omega=s}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{s+\alpha}{s+\beta}.$$

Определим $W(p)$. Имеем

$$W(p)=W(s)\big|_{s=p}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{p+\alpha}{p+\beta}.$$

Из (4.6) получим

$$W(p)=\frac{Y(t)}{X(t)}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{p+\alpha}{p+\beta}$$

или $\quad (p+\beta)Y(t)=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}(p+\alpha)X(t).$

Так как $p\equiv\frac{d}{dt}$, то окончательно получим

$$\frac{dY(t)}{dt}+\beta\cdot Y(t)=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\left[\frac{dX(t)}{dt}+\alpha\cdot X(t)\right]. \tag{4.14}$$

Соотношение (4.14) есть искомое дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.3. По результатам обработки реализации входного случайного процесса *X(t)* корреляционная функция аппроксимирована следующей формулой:

$$K_x(t)=Ae^{-\alpha|t|}, \tag{4.15}$$

где A и α принимают положительные значения: $A>0$, $\alpha>0$. Согласно (4.9) корреляционная функция $K_x(t)$ может быть представлена в виде

$$K_x(t)=\begin{cases}K_x^+(t)=Ae^{-\alpha t}, t\ge 0;\\ K_x^-(t)=Ae^{\alpha t}, t\le 0.\end{cases} \tag{4.16}$$

По результатам обработки реализаций случайных процессов *X(t)*, *Y(t)* взаимная корреляционная функция аппроксимирована следующими выражениями:

$$K_{yx}(t)=Be^{-\beta t}, t\ge 0;$$

$$K_{yx}(t)=Be^{\alpha t}, t\le 0,$$

т.е. в соответствии с (4.10) имеем

$$K_{yx}(t)=\begin{cases}K_{yx}^+(t)=Be^{-\beta t}, t\ge 0\\ K_{yx}^-(t)=Be^{\alpha t}, t\le 0.\end{cases} \tag{4.17}$$

Используя формулу (4.12.) получим

$$\begin{aligned}&K_x^+(s)=L\{Ae^{-\alpha t}\}=\frac{A}{s+\alpha};\\ &K_x^-(s)=L\{Ae^{\alpha t}\}=\frac{A}{s-\alpha};\\ &K_{yx}^+(s)=L\{Be^{-\beta t}\}=\frac{B}{s+\beta};\\ &K_{yx}^-(s)=L\{Be^{\alpha t}\}=\frac{B}{s-\alpha}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Согласно (4.11) с учетом (4.18) находим

$$W(s)=\frac{B\frac{1}{s+\beta}-B\frac{1}{s-\alpha}}{A\frac{1}{s+\alpha}-A\frac{1}{s-\alpha}},$$

откуда передаточная функция динамического объекта

$$W(s)=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{s+\alpha}{s+\beta}. \tag{4.19}$$

Определим $W(j\omega)$. Имеем

$$W(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{j\omega+\alpha}{j\omega+\beta}.$$

Определим $W(p)$. Имеем

$$W(p)=W(s)|_{s=p}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{p+\alpha}{p+\beta}.$$

Из (4.6) получим

$$W(p)=\frac{Y(t)}{X(t)}=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{p+\alpha}{p+\beta}$$

или $\quad (p+\beta)Y(t)=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}(p+\alpha)X(t).$

Так как $p\equiv\frac{d}{dt}$, то окончательно получим

$$\frac{dY(t)}{dt}+\beta\cdot Y(t)=\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}\left[\frac{dX(t)}{dt}+\alpha\cdot X(t)\right]. \tag{4.20}$$

Соотношение (4.20) есть искомое дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.4. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};\quad S_y(\omega)=\frac{2\sigma_y^2\alpha^3}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.5. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};\quad S_y(\omega)=\frac{D_y\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(T^2\omega^2+1)^3}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.6. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};\quad S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{T^2\omega^2+1}{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\omega^2}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.7. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};\quad S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\omega^2}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.8. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};\quad S_y(\omega)=\frac{2\sigma_y^2\alpha^3}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^3}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.9. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi};\quad S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(T_1^2\omega^2+1)^2}{(T_2^2\omega^2+1)^3}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.10. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{1}{\pi(0{,}25+\omega^2)};\quad S_{yx}(\omega)=\frac{4-2(j\omega)}{\pi(1+4{,}25\omega^2+\omega^4)}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.11. Дано

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};$$

$$S_{yx}(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}k\cdot\frac{(1-T_1T_2\omega^2)-(T_1+T_2)(j\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(\omega^2+\alpha^2)}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)=?$

2) $W(s)=?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.12. Дано

$$K_x(t) = Ae^{-\alpha|t|} \cdot \cos\omega t,$$

$$K_{yx}(t) = (B\cos\omega t + \ \sin\omega t) \cdot e$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.13. Дано

$$K_x(t) = \begin{cases} K_x^+(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \cos\omega t, t \ge 0; \\ K_x^-(t) = Ae^{\alpha t} \cdot \cos\omega t, t \le 0; \end{cases}$$

$$K_{yx}(t) = \begin{cases} K_{yx}^+(t) = Be^{-\beta t}, t \ge 0; \\ K_{yx}^-(t) = Be^{\alpha t} \cdot \cos\omega t, t \le 0. \end{cases}$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.14. Дано

$$K_x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$$

$$K_{yx}(t) = \begin{cases} K_{yx}^+(t) = (B + C\sin\gamma t)e^{-\alpha t}, t \ge 0; \\ K_{yx}^-(t) = Be^{\alpha t}, t \le 0. \end{cases}$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.15. Дано

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}; \quad S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 - \omega^2 + 1}.$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Указание : при решении задачи 4.15 учесть соотношение вида

$$\omega^4 - \omega^2 + 1 = [(j\omega)^2 + (j\omega) + 1][(-j\omega)^2 - (j\omega) + 1].$$

Задача 4.16. Дано

$$K_x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$$

$$K_{yx}(t) = \begin{cases} K_{yx}^+(t) = Be^{-\alpha t}, t \ge 0; \\ K_{yx}^-(t) = Be^{\alpha t}, t \le 0. \end{cases}$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.17. Дано

$$K_x(t) = \begin{cases} K_x^+(t) = (A + A_1 t)e^{-\alpha t}, t \ge 0; \\ K_x^-(t) = (A - A_1 t)e^{\alpha t}, t \le 0. \end{cases}$$

$$K_{yx}(t) = \begin{cases} K_{yx}^+(t) = (B + B_2 t)e^{-\alpha t}, t \ge 0; \\ K_{yx}^-(t) = (B + B_1 t)e^{\alpha t}, t \le 0. \end{cases}$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.18. Дано

$$S_x(\omega) = a; \quad S_y(\omega) = \frac{a}{1 + (k\omega)^2}$$

Определить: 1) $W(j\omega) = ?$

2) $W(s) = ?$

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

Задача 4.19. Дано

$$S_x(\omega)=C; \qquad S_y(\omega)=\frac{C}{\left|-\omega^2+2hj\omega+k^2\right|^2}.$$

Определить: 1) $W(j\omega)$ = ?

2) $W(s)$ = ?

3)Определить дифференциальное уравнение, описывающее динамический объект.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

УМЕНЬШЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ДАТЧИКОМ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА НА ВХОДЕ ДАТЧИКА

Теоретические сведения

Рассмотрим схему на рис. 5.1.

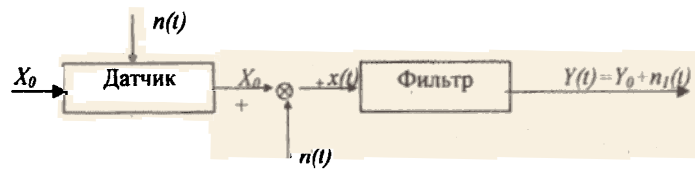

Рис. 5.1

Здесь X_0 - полезный измеряемый сигнал на входе датчика; $n(t)$ - случайная погрешность измерения датчиком полезного сигнала X_0; $x(t)$ - измеренный сигнал на выходе датчика. Для уменьшения $n(t)$ используется фильтр с передаточной функцией $W(s)$ или частотной характеристикой $W(j\omega)$. Сигнал на выходе фильтра $Y(t)$ содержит два слагаемых. Первое слагаемое Y_0 - это значение, которое получит сигнал X_0 после прохождения через фильтр. Полагаем, что X_0 - const. Тогда сигналы X_0 и Y_0 связаны соотношением

$$Y_0=W(0)\cdot X_0. \tag{5.1}$$

Если $W(0)$=1, то сигнал X_0 проходит через фильтр без искажения, так как в этом случае $Y_0=X_0$.

Сигнал $n_1(t)$ обусловлен прохождением сигнала $n(t)$ через фильтр. Обозначим дисперсию сигнала $n(t)$ через D_n ,а дисперсию сигнала $n_1(t)$ через D_{n_1}. Между значениями этих дисперсий имеет место соотношение

$$D_{n_1}\le D_n\,. \tag{5.2}$$

На рис 5.2 показаны сигналы $X(t)$ и $Y(t)$ в предположении, что $Y_0=X_0$.

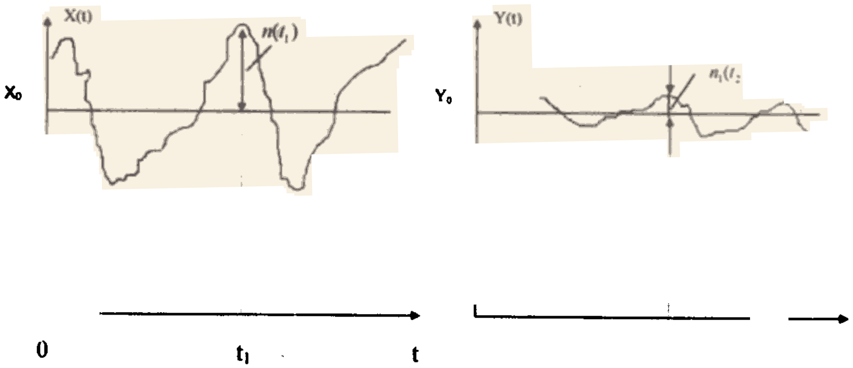

Рис 5.2

Схему, приведенную на рис. 5.1, можно представить в виде двух схем, приведенных на рис. 5.3, 5.4.

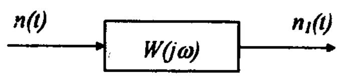

Рис. 5.3

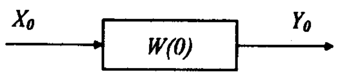

Рис. 5.4

Обозначим через $S_n(\omega)$ и $S_{n_1}(\omega)$ спектральные плотности случайных сигналов $n(t)$ и $n_1(t)$. Имеет место соотношение вида

$$S_{n_1}(\omega)=|W(j\omega)|^2\, S_n(\omega), \tag{5.3}$$

где $|W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega).$ (5.4)

Дисперсия сигнала $n_1(t)$ определяется выражением

$$D_{n_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{n_1}(\omega)d\omega. \tag{5.5}$$

Задача заключается в определении D_{n_1} и коэффициента ρ, вычисляемого по формуле

$$\rho = \frac{D_{n_1}}{D_n}. \tag{5.6}$$

Коэффициент ρ называется коэффициентом сглаживания фильтром случайной погрешности $n(t)$. По величине ρ можно судить, во сколько раз дисперсия D_n больше дисперсии D_{n_1}, т.к.

$$\frac{D_n}{D_{n1}} = \frac{1}{\rho}. \tag{5.7}$$

Решение типовых задач

Задача 5.1. Дано

$W(s)=\dfrac{k}{Ts+1}$; $S_n(\omega)=\dfrac{Dn\alpha}{Dn1}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}$; X_0=10.

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Решение. Определим $W(j\omega)$. Имеем

$$W(j\omega)= W(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{Tj\omega+1}.$$

Определим $W(-j\omega)$. Получим

$$W(-j\omega)= \frac{k}{T(-j\omega)+1}.$$

Представим $S_n(\omega)$ в виде

$$S_n(\omega)= \frac{Dn\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{j\omega+\alpha}\cdot\frac{1}{-j\omega+\alpha}.$$

Соотношение (5.5) с учетом (5.3), (5.4) примет вид

$$D_{n_1} = Dn\alpha \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{(Tj\omega+1)[T(-j\omega)+1](j\omega+\alpha)(-j\omega+\alpha)}d\omega =$$

$$= 2Dn\alpha k^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[[T(j\omega)+1](j\omega+\alpha)][[T(-j\omega)+1](-j\omega+\alpha)]}d\omega$$

$$D n_1 = 2Dn\alpha k^2 \times$$

или

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[T(j\omega)^2+(T\alpha+1)\cdot j\omega+\alpha][T(-j\omega)^2+(T\alpha+1)(-j\omega)+\alpha]}d\omega \quad (5.8)$$

Запишем полученное соотношение в виде

$$D n_1 = 2Dn\alpha k^2 J_2,$$

где $$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0\cdot(j\omega)^2+g_1}{[h_0(j\omega)^2+h_1(j\omega)+h_2][h_0\cdot(-j\omega)^2+h_1\cdot(-j\omega)+h_2]}d\omega. \quad (5.9)$$

Соотношение (5.9) описывает стандартный интеграл порядка n=2. Общее выражение для стандартного интеграла порядка n имеет вид

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0(j\omega)^{2n-2}+g_1(j\omega)^{2n-4}+...+g_{n-1}}{[h_0(j\omega)^n+h_1(j\omega)^{n-1}+...+h_n][h_0(-j\omega)^n+h_1(-j\omega)^{n-1}+...+h_n]}d\omega.$$

Интеграл J_n при n=1,2,3 определяется выражениями (3.7), (3.8), (3.9) (см. практическое занятие №3).

Сопоставляя (5.8) и (5.9), получим

$$\left.\begin{array}{l} h_0 = T; h_1 = T\alpha+1; h_2 = \alpha; \\ g_0 = 0; g_1 = 1. \end{array}\right\} \quad (5.10)$$

Подставим (5.10) в (3.8). Имеем

$$J_2 = \frac{T}{\frac{\alpha}{2T(T\alpha+1)}}$$

или $$J_2 = \frac{}{2\alpha(T\alpha+1)}.$$

Окончательно получим

$$D n_1 = 2Dn\alpha k^2 J_2 = D_n \frac{k^2}{T\alpha+1} \quad (5.11)$$

Из (5.11) определим ρ по формуле (5.6). Имеем

$$\rho = \frac{k^2}{T\alpha+1}. \quad (5.12)$$

Найдем Y_0 по формуле (5.1). Так как $W(0)=k$, то

$$Y_0 = kX_0 = 10k. \quad (5.13)$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.2. Дано

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1};\ S_n(\omega) = \frac{D_n\alpha}{\pi}\frac{\cdot}{(\omega^2+\alpha^2)^2};\ X_0 = 10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.3. Дано

$$W(s) = \frac{k}{(Ts+1)^2},\ S_n(\omega) = \frac{D_n\alpha}{\pi}\frac{}{\omega^2+\alpha^2}\quad X_0 = 10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.4. Дано

$$W(s) = \frac{T_1s+1}{T_2s+1},\ S_n(\omega) = \frac{D_n\alpha}{\pi}\frac{}{(\omega^2+\alpha^2)^2}\quad X_0 = 10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.5. Дано

$$W(s)=\frac{0{,}5\cdot s+1}{0{,}25\cdot s^2+\xi\cdot s+1},\ S_n(\omega)=\left|\frac{j\omega+1}{j\omega+2}\right|^2;\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.6. Дано

$$W(s)=\frac{s+2}{s^2+3s+2},\ S_n(\omega)=\frac{2D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}\ \ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.7. Дано

$$W(s)=\frac{4s+1}{3s+1},\ S_n(\omega)=\frac{12}{\pi\left(\omega^2+4\right)^2}\ \ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.8. Дано

$$W(s)=\frac{s\cdot(T_1s+1)}{T_1s^2+s+k},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2\left(\omega^2+\beta^2\right)};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.9. Дано

$$W(s)=\frac{s\cdot(Ts+1)}{Ts^2+s+k},\ S_n(\omega)=\frac{D_nT_g}{\pi}\ \frac{1}{T_g^2\omega^2+1};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.10. Дано

$$W(s)=\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}\ \ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.11. Дано

$$W(s)=\frac{k}{T^2\cdot s^2+2\xi T\cdot s+1},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.12. Дано

$$W(s)=\frac{k}{Ts+1},\ S_n(\omega)=\frac{2D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{b_1^2\omega^2+b_0^2}{\left(a_1^2\omega^2+a_0^2\right)\left(\omega^2+\alpha^2\right)};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.13. Дано $W(s)=\dfrac{k}{Ts+}$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\,\frac{\omega^2+b^2}{\left[(j\omega)^2+2\alpha\,j\omega+b^2\right]\left[(-j\omega)^2+2\alpha(-j\omega)+b^2\right]};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.14. Дано

$$W(s)=k\cdot\frac{T_3\cdot s+1}{(T_1s+1)(T_2s+1)},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.15. Дано

$$W(s)=\frac{k}{s\cdot(Ts+1)+k},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.16. Дано

$$W(s)=\frac{k}{T_1s^2+s+k},\ S_n(\omega)=\frac{D_nT}{\pi}\ \frac{1}{T^2\omega^2+1};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.17. Дано

$$W(s)=\frac{k}{T_1 s+k+1},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.18. Дано

$$W(s)=\frac{k}{as^2+bs+c},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.19. Дано

$$W(s)=\frac{k\gamma}{(s+\gamma)^2},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\beta^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.20. Дано

$$W(s)=\frac{s+\beta}{s+\alpha},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.21. Дано

$$W(s)=\frac{m_1 s+m_0}{T_2 s^2+T_1 s+T_0},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\beta^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

Задача 5.22. Дано

$$W(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\beta^2};\ X_0=10.$$

Определить D_{n_1}, ρ, Y_0.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

СУММАРНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА, ВКЛЮЧЕННОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО С ДАТЧИКОМ ИЗМЕРЯЕМОГО СИГНАЛА

Теоретические сведения

Рассмотрим схему на рис. 6.1.

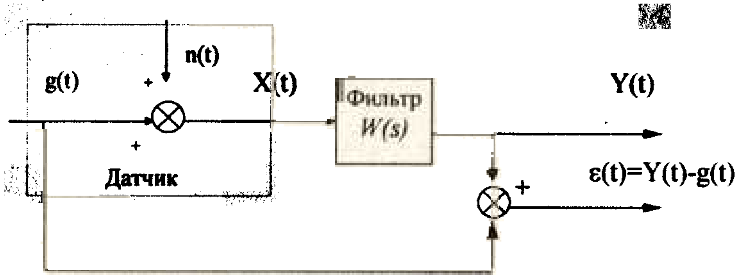

Рис. 6.1

Здесь g(t) – полезный случайный сигнал (полезный измеряемый датчиком сигнал;) n(t) - помеха (погрешность измерения датчиком сигнала g(t)); x(t) – измеренный случайный сигнал на выходе датчика; y(t) – случайный сигнал на выходе фильтра; ε (t) – суммарная погрешность измерения случайного сигнала g(t); *W(s)* - передаточная функция фильтра. Предполагается, что g(t) и n(t) некоррелированные между собой случайные процессы. Кроме того, предполагается, что g(t) и n(t) имеют нулевые математические ожидания.

Схема на рис. 6.1 может быть приведена к виду рис. 6.2.

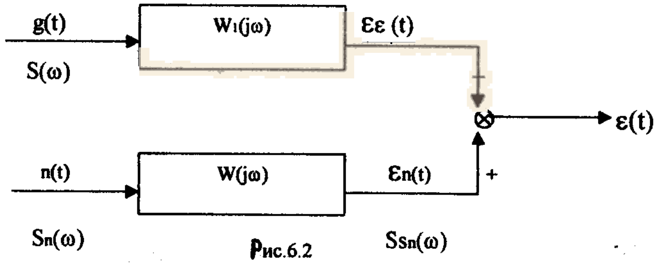

Рис.6.2

Здесь $W(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}$; $W_1(j\omega)=W(j\omega)-1$; $\varepsilon_g(t)$ - составляющая $\varepsilon(t)$, обусловленная искажениями полезного сигнала $g(t)$ при прохождении $g(t)$ через фильтр (динамическая ошибка); $\varepsilon_n(t)$ - составляющая $\varepsilon(t)$, обусловленная прохождением помехи $n(t)$ через фильтр (случайная погрешность), $S_g(\omega)$ - спектральная плотность помехи $n(t)$; $S_{\varepsilon_g}(\omega)$ - спектральная плотность ошибки $\varepsilon_g(t)$; $S_{\varepsilon_n}(\omega)$ - спектральная плотность ошибки $\varepsilon_n(t)$.

Имеют место следующие соотношения:

$$S_{\varepsilon_g}(\omega)=\left|W_1(j\omega)\right|^2\cdot S_g(\omega); \tag{6.1}$$

$$S_{\varepsilon_n}(\omega)=\left|W(j\omega)\right|^2\cdot S_n(\omega); \tag{6.2}$$

$$D_{\varepsilon_g}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varepsilon_g}(\omega)d\omega; \tag{6.3}$$

$$D_{\varepsilon_n}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varepsilon_n}(\omega)d\omega; \tag{6.4}$$

$$D_\varepsilon=D_{\varepsilon_g}+D_{\varepsilon_n}, \tag{6.5}$$

где D_ε - дисперсия погрешности $\varepsilon(t)$; D_{ε_g} - дисперсия погрешности $\varepsilon_g(t)$; D_{ε_n} - дисперсия погрешности $\varepsilon_n(t)$.

Решение типовых задач

Задача 6.1. Дано:

$$W(j\omega)=\frac{k}{T\cdot j\omega+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha^2+\omega^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha_n^2+\omega^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon_g}, D_\varepsilon$.

Решение. Определим $W_1(j\omega)$. Имеем

$$W_1(j\omega)=W(j\omega)-1=\frac{(k-1)-jT\omega}{jT\omega+1}. \tag{6.6}$$

Представим $S_g(\omega)$ и $S_n(\omega)$ в виде

$$S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{j\omega+\alpha}\cdot\frac{1}{-j\omega+\alpha}; \tag{6.7}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{j\omega+\alpha_n}\cdot\frac{1}{-j\omega+\alpha_n}. \tag{6.8}$$

Запишем $\left|W(j\omega)\right|^2$ и $\left|W_1(j\omega)\right|^2$ в виде

$$\left.\begin{aligned}\left|W(j\omega)\right|^2&=W(j\omega)\cdot W(-j\omega),\\ \left|W_1(j\omega)\right|^2&=W_1(j\omega)\cdot W_1(-j\omega)\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\left|W(j\omega)\right|^2&=\frac{k}{T\cdot(j\omega)+1}\cdot\frac{k}{T\cdot(-j\omega)+1},\\ \left|W_1(j\omega)\right|^2&=\frac{(k-1)-T\cdot(j\omega)}{T\cdot(j\omega)+1}\cdot\frac{(k-1)-T\cdot(-j\omega)}{T\cdot(-j\omega)+1}\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Определим первоначально D_{ε_n}. Подставим в (6.4) соотношение (6.2) с учетом (6.8), (6.10). Имеем

$$D_{\varepsilon_n}=2D_n\alpha_nk^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{[(jT\omega+1)(j\omega+\alpha_n)][T(-j\omega)+1](-j\omega+\alpha_n)}d\omega$$

или

$$D_{\varepsilon_n}=2D_n\alpha_nk^2\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{[T(j\omega)^2+(T\alpha_n+1)(j\omega)+\alpha_n][T(-j\omega)^2+(T\alpha_n+1)(-j\omega)+\alpha_n]}d\omega. \tag{6.11}$$

Соотношение (6.11) можно записать в виде

$$D_{\varepsilon_n}=2D_n\alpha_nk^2\cdot J_2, \tag{6.12}$$

где J_2 - стандартный интеграл вида

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(j\omega)^2+g_1}{\left[h_0(j\omega)^2+h_1(j\omega)+h_2\right]\cdot\left[h_0(-j\omega)^2+h_1(-j\omega)+h_2\right]}d\omega. \qquad (6.13)$$

Соотношение (6.13) описывает стандартный интеграл порядка n=2. Общее выражение для стандартного интеграла порядка n имеет вид

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(j\omega)^{2n-2}+g_1(j\omega)^{2n-4}+....+g_{n-1}}{\left[h_0(j\omega)^n+h_1(j\omega)^{n-1}+....+h_n\right]\cdot\left[h_0(-j\omega)^n+h_1(-j\omega)^{n-1}+....+h_n\right]}d\omega,$$

Интеграл J_n при n=1,2,3 определяется соотношениями

$$J_1 = \frac{g_0}{2h_0h_1}; \qquad (6.14)$$

$$J_2 = \frac{-g_0+\frac{h_0}{h_2}g_1}{2h_0h_1}; \qquad (6.15)$$

$$J_3 = \frac{-h_2g_0+h_0g_1-\frac{h_0h_1g_2}{h_3}}{2h_0(h_0h_3-h_1h_2)}. \qquad (6.16)$$

Сопоставляя интегралы в соотношениях (6.11) и (6.13), получим

$$\left.\begin{aligned} &h_0=T; h_1=T\alpha_n+1; h_2=\alpha_n;\\ &g_0=0; g_1=1.\end{aligned}\right\} \qquad (6.17)$$

Подставим (6.17) в (6.15). Имеем

$$J_2 = \frac{1}{2\alpha_n(T\alpha_n+1)}. \qquad (6.18)$$

Соотношение (6.12) с учетом (6.18) примет вид

$$D_{\varepsilon_n} = D_n\cdot\frac{k^2}{T\alpha_n+1} \qquad (6.19)$$

Аналогичным образом определим D_{ε_g}. Имеем

$$D_{\varepsilon_g} = 2D_g\alpha\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[(k-1)-T\cdot(j\omega)]\cdot[(k-1)-T\cdot(-j\omega)]}{[(jT\omega+1)(j\omega+\alpha)]\cdot[T(-j\omega)+1](-j\omega+\alpha)}d\omega$$

$$D_{\varepsilon_g} = 2D_g\alpha\times \qquad (6.20)$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(k-1)^2-T^2\cdot(j\omega)^2}{[T(j\omega)^2+(T\alpha+1)(j\omega)+\alpha][T(-j\omega)^2+(T\alpha+1)(-j\omega)+\alpha]}d\omega.$$

Соотношение (6.20) можно записать в виде

$$D_{\varepsilon_g} = 2D_g\alpha\cdot J_2, \qquad (6.21)$$

где J_2 определяется соотношением (6.13).

Сопоставляя интегралы в соотношениях (6.20) и (6.13), получим

$$\left.\begin{aligned} &h_0=T; h_1=T\alpha+1; h_2=\alpha;\\ &g_0=-T^2; g_1=(k-1)^2.\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Соотношение (6.21) с учетом (6.15),(6.22) примет вид

$$D_{\varepsilon_g} = D_g\cdot\frac{T\alpha+(k-1)^2}{T\alpha+} \qquad (6.23)$$

Подставляя (6.19), (6.23) в (6.5) ,получим

$$D_\varepsilon = D_g\cdot\frac{T\alpha+(k-1)^2}{T\alpha+1}+D_n\cdot\frac{k^2}{T\alpha_n+1}. \qquad (6.24)$$

Соотношение (6.19) характеризует дисперсию погрешности $\varepsilon_n(t)$.

Соотношение (6.23) характеризует дисперсию погрешности $\varepsilon_g(t)$, а соотношение (6.24) - дисперсию погрешности $\varepsilon(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.2. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1},\ S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{}{\omega^2+\alpha_n^2},$$

$$S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{(j\omega+b)(-j\omega+b)}{\left[(j\omega)^2+2\alpha\cdot(j\omega)+b^2\right]\cdot\left[(-j\omega)^2+2\alpha\cdot(-j\omega)+b^2\right.}$$

Эпределить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$

Задача 6.3. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1}\qquad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{}{\omega^2+\alpha^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_i}{\pi}\qquad\frac{}{j\omega)^2+2\alpha_n}\qquad\frac{(j\omega+b_n)(-j\omega+b_n)}{\omega)+b_n^2\big]\cdot\big[(-j\omega)^2+2\alpha_n\quad -j\omega)+b_n^2}$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.4. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1}\qquad S_n(\omega)=$$

$$S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{(j\omega+b)(-j\omega+b)}{\left[(j\omega)^2+2\alpha\cdot(j\omega)+b^2\right]\cdot\left[(-j\omega)^2+2\alpha\quad\omega)+b^2\right.}$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\iota}\quad D_{\varepsilon}$

Задача 6.5. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{[T_1(j\omega)+1][T_2(j\omega)+1]}\qquad {}_n(\omega)=$$

$$S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{}{\omega^2+\alpha^2}$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.6. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1}\qquad S_n(\omega)=$$

$$S_g(\omega)=\frac{2D_g\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.7 Дано

$$W(j\omega)=\frac{k\cdot\gamma}{j\omega+\gamma}\qquad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha_1}{\pi}\ \frac{}{\omega^2+\alpha_1^2}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_2}{\pi}\cdot\frac{}{\omega^2+\alpha_2^2}$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.8. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{[T_1(j\omega)+1][T_2(j\omega)+1]};\qquad S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}$$

$$S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.9. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{[T(j\omega)+1]^2};\quad S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2};$$

$$S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.10. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1}\qquad S_g(\omega)=2D_g\alpha\cdot\frac{b_1^2\omega^2+b_0^2}{(a_1^2\omega^2+a_0^2)(\alpha^2+\omega^2)}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\ \frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.11. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k\cdot(j\omega)}{T(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.12. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k\cdot(j\omega)}{T(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha_n^2)^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.13. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k\cdot(j\omega)}{T(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{}{\omega^2+\alpha^2}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{}{(\omega^2+\alpha_n^2)^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.14. Дано

$$W(j\omega)=\frac{T_1(j\omega)+1}{T_2(j\omega)+1}\qquad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.15. Дано

$$W(j\omega)=\frac{T_1(j\omega)+1}{T_2(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha_n^2)^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.16. Дано

$$W(j\omega)=\frac{T_1(j\omega)+1}{T_2(j\omega)+1}\qquad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{}{(\omega^2+\alpha_n^2)^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.17. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)^2+j\omega+k}\qquad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\ \frac{}{\omega^2+\alpha^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.18. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)^2+j\omega+k}\qquad S_g(\omega)=\frac{2D_gT_1}{T_1^2\omega^2+1}$$

$$S_n(\omega)=\frac{2D_nT_2}{T_2^2\omega^2+1};$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.19. Дано

$$W(j\omega)=\frac{n^2}{(j\omega)^2+2h(j\omega)+n^2};\qquad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.20. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha_n^2)^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.21. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha_n^2)^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

Задача 6.22. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T(j\omega)+1};\quad S_g(\omega)=\frac{D_g\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2};$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\alpha_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha_n^2}.$$

Определить дисперсии $D_{\varepsilon_g}, D_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ПО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ

Теоретические сведения

Рассмотрим схему следящей системы на рис 7.1.

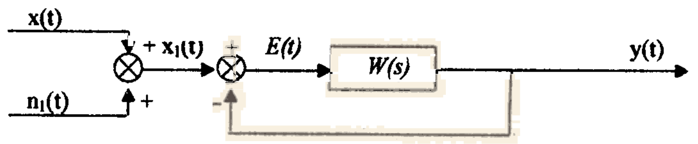

Рис. 7.1

Здесь x(t) - случайный полезный сигнал; n(t) - помеха; y(t) - случайный сигнал на выходе следящей системы; *E(t)* - ошибка следящей системы, представляющая собой случайный процесс; $x_1(t)$ - случайный сигнал на входе следящей системы; *W(s)* - передаточная функция разомкнутого контура следящей системы. Предполагается, что x(t) и n(t) некоррелированные между собой случайные процессы. Кроме того, предполагается, что x(t) и n(t) имеют нулевые математические ожидания.

Схема на рис. 7.1 может быть приведена к виду

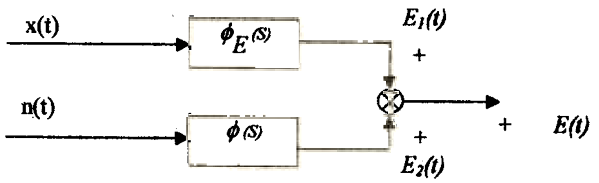

Рис. 7.2

Здесь $E_1(t)$ - динамическая ошибка следящей системы; $E_2(t)$ - ошибка следящей системы, обусловленная помехой n(t). Передаточные функции $\phi_E(s)$ и $\phi(s)$ определяются соотношениями

$$\phi_E(s)=\frac{1}{1+W(s)};\qquad (7.1)$$

$$\phi(s)=\frac{W(s)}{1+W(s)}.\qquad (7.2)$$

Схему на рис. 7.2 представим в виде (рис.7.3).

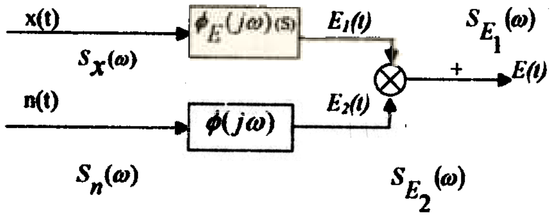

Рис. 7.3

На рисунке 7.3 $S_x(\omega)$ - спектральная плотность сигнала x(t); $S_n(\omega)$ - спектральная плотность помехи n(t); $S_{E_1}(\omega)$- спектральная плотность ошибки $E_1(t)$; $S_{E_2}(\omega)$ - спектральная плотность ошибки $E_2(t)$.

Имеют место следующие соотношения

$$S_{E_1}(\omega)=\left|\phi_E(j\omega)\right|^2\cdot S_x(\omega);\qquad (7.3)$$

$$S_{E_2}(\omega)=\left|\phi(j\omega)\right|^2\cdot S_n(\omega);\qquad (7.4)$$

$$D_{E_1}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{E_1}(\omega)d\omega;\qquad (7.5)$$

$$D_{E_2}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{E_2}(\omega)d\omega;\qquad (7.6)$$

$$D_E=\sigma_E^2=D_{E1}+D_{E2},\qquad (7.7)$$

где D_E - дисперсия погрешности E(t); σ_E - среднеквадратическое значение погрешности $E(t)$ (среднеквадратическая ошибка следящей системы); D_{E1} - дисперсия погрешности $E_1(t)$; D_{E2} - дисперсия погрешности $E_2(t)$.

Решение типовых задач

Задача 7.1. Дано

$$W(j\omega)=\frac{k}{T\cdot j\omega+1};\ S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\alpha^2};\ S_n(\omega)=\frac{D_n\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\beta^2}.$$

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Решение. Определим $\phi_E(j\omega)$. Имеем

$$\phi_E(j\omega)=\frac{1}{1+W(j\omega)}=\frac{1}{1+\dfrac{k}{T\cdot j\omega+1}}$$

или $$\phi_E(j\omega)=\frac{Tj\omega+1}{Tj\omega+k+1}\qquad (7.8)$$

Определим $\phi\ (j\omega)$. Получим

$$\phi\ (j\omega)=\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}=\frac{\dfrac{k}{T\cdot j\omega+1}}{1+\dfrac{k}{T\cdot j\omega+1}}$$

или $$\phi(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+k+1}.\qquad (7.9)$$

Представим $S_x(\omega)$ и $S_n(\omega)$ в виде

$$S_x(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{j\omega+\alpha}\cdot\frac{1}{-j\omega+\alpha};\qquad (7.10)$$

$$S_n(\omega)=\frac{D_n\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{j\omega+\beta}\cdot\frac{1}{-j\omega+\beta}. \tag{7.11}$$

Запишем $\left|\phi_E(j\omega)\right|^2$ и $\left|\phi(j\omega)\right|^2$ в виде

$$\left.\begin{aligned}&\left|\phi_E(j\omega)\right|^2=\phi_E(j\omega)\cdot\phi_E(-j\omega)\\&\left|\phi(j\omega)\right|^2=\phi(j\omega)\cdot\phi(-j\omega)\end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\left|\phi_E(j\omega)\right|^2=\frac{Tj\omega+1}{Tj\omega+k+1}\cdot\frac{T(-j\omega)+1}{T(-j\omega)+k+1},\\&\left|\phi(j\omega)\right|^2=\frac{k}{Tj\omega+k+1}\cdot\frac{k}{T(-j\omega)+k+1}.\end{aligned}\right| \tag{7.13}$$

Определим первоначально D_{E1}. Подставим в (7.5) соотношение (7.3) с учетом (7.10), (7.13). Имеем

$$D_{E_1}=2D_x\alpha\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(Tj\omega+1)\cdot[T(-j\omega)+1]}{(Tj\omega+k+1)(j\omega+\alpha)\cdot[T(-j\omega)+k+1](-j\omega+\alpha)}d\omega$$

или

$$D_{E_1}=2D_x\alpha\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-T^2(j\omega)^2+1}{\left[T(j\omega)^2+(T\alpha+k+1)\cdot(j\omega)+(k+1)\alpha\right]\cdot\left[T(-j\omega)^2+(T\alpha+k+1)(-j\omega)+(k+1)\alpha\right]}d\omega. \tag{7.14}$$

Соотношение (7.14) можно записать в виде

$$D_{E_1}=2D_x\alpha\cdot J_2, \tag{7.15}$$

где J_2 - стандартный интеграл вида

$$J_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0\cdot(j\omega)^2+g_1}{\left[n_0(j\omega)^2+n_1(j\omega)+n_2\right]\cdot\left[n_0(-j\omega)^2+n_1(-j\omega)+n_2\right]}d\omega. \tag{7.16}$$

Соотношение (7.16) описывает стандартный интеграл порядка n=2.

Общее выражение для стандартного интеграла порядка n имеет вид

$$J_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0\cdot(j\omega)^{2n-2}+g_1\cdot(j\omega)^{2n-4}+\ldots+g_{n-1}}{\left[n_0(j\omega)^n+n_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+n_n\right]\cdot\left[n_0(-j\omega)^n+n_1(-j\omega)^{n-1}+\ldots+n_n\right]}d\omega.$$

Интеграл J_n при n=1, 2, 3 определяется соотношениями

$$J_1=\frac{g_0}{2n_0n_1}; \tag{7.17}$$

$$J_2=\frac{-g_0+\frac{n_0}{n_2}g_1}{2n_0n_1}; \tag{7.18}$$

$$J_3=\frac{-n_2g_0+n_0g_1-\frac{n_0n_1g_2}{n_3}}{2n_0(n_0n_3-n_1n_2)}. \tag{7.19}$$

Составляя интегралы в соотношениях (7.14) и (7.16), получим

$$\left.\begin{aligned}&n_0=T;n_1=T\alpha+k+1;n_2=(k+1)\alpha;\\&g_0=-T^2;g_1=1\end{aligned}\right\}. \tag{7.20}$$

Подставим (7.20) в (7.18). Имеем

$$J_2=\frac{T^2+\frac{T}{(k+1)\alpha}}{2T\cdot(T\alpha+k+1)}=\frac{T\alpha(k+1)+1}{2\alpha(k+1)(T\alpha+k+1)}. \tag{7.21}$$

Соотношение (7.15) с учетом (7.21) примет вид

$$D_{E_1}=D_x\frac{T\alpha k+(T\alpha+1)}{T\alpha(k+1)+(k+1)^2}. \tag{7.22}$$

Аналогичным образом определим D_{E2}. Имеем

$$D_{E_2}=2D_n\beta\cdot k^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(T\cdot j\omega+k+1)(j\omega+\beta)[T(-j\omega)+k+1](-j\omega+\beta)}d\omega$$

$$D_{E_2} = 2D_n\beta \cdot k^2 \times$$

или

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\left[T(j\omega)^2+(T\beta+k+1)\cdot(j\omega)+(k+1)\beta\right]\cdot\left[T(-j\omega)^2+(T\beta+k+1)(-j\omega)+(k+1)\beta\right]} \qquad (7.23)$$

Соотношение (7.23) можно записать в виде

$$D_{E_2} = 2D_n\beta \cdot k^2 \cdot J_2, \qquad (7.24)$$

где J_2 определяется соотношением (7.16).

Сопоставляя интегралы в соотношениях (7.23) и (7.16), получим

$$\left.\begin{aligned} & n_0 = T; n_1 = T\beta+k+1; n_2 = (k+1)\beta; \\ & g_0 = -T^2; g_1 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (7.25)$$

Подставим (7.25) в (7.18). Имеем

$$J_2 = \frac{\dfrac{T}{(k+1)\beta}}{2T\cdot(T\beta+k+1)} = \frac{1}{2\beta(k+1)(T\beta+k+1)} \qquad (7.26)$$

Соотношение (7.24) с учетом (7.26) примет вид

$$D_{E_2} = D_n \frac{k^2}{(k+1)(T\beta+k+1)}. \qquad (7.27)$$

Подставляя (7.22), (7.27) в (7.7), получим

$$D_E = \sigma_E^2 = \frac{D_x}{k+1}\cdot\frac{T\alpha(k+1)+1}{T\alpha+(k+1)} + \frac{D_n k^2}{k+1}\cdot\frac{1}{T\beta+k+1}. \qquad (7.28)$$

Соотношение (7.22) характеризует дисперсию погрешности $E_1(t)$. Соотношение (7.27) характеризует дисперсию погрешности $E_2(t)$, а соотношение (7.28) - дисперсию погрешности $E(t)$.

Задача 7.2. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.4.

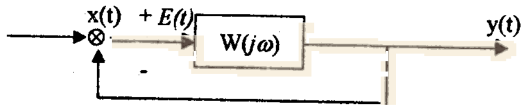

Рис. 7.4.

Дано $W(j\omega) = \dfrac{k}{T\cdot j\omega+1}$; $S_x(\omega) = \dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}$.

Определить дисперсию D_E.

Решение. В рассматриваемой задаче n(t)=0. Следовательно $S_n(\omega)=0$. Кроме того, $D_E = D_{E1}$, так как $E_2(t)=0$ и $D_{E2}=0$. В остальном решение задачи 7.2 аналогично решению задачи 7.1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.3. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega) = \dfrac{k_1 k_2}{(T_1\cdot j\omega+1)(j\omega)}$; $S_n(\omega) = \dfrac{a^2}{2\pi}$, a=const;

$$S_x(\omega) = \frac{2k^2\beta^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2\cdot(\omega^2+\beta^2)}.$$

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.4. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.4.

Дано $W(j\omega) = \dfrac{k}{T\cdot j\omega+1}$; $S_x(\omega) = \dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$.

Определить дисперсию D_E.

Задача 7.5. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.4.

Дано $W(j\omega) = \dfrac{k}{j\omega\cdot(T_1\cdot j\omega+1)}$; $S_x(\omega) = \dfrac{TD_x}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2(T^2\omega^2+1)}$.

Определить дисперсию D_E.

Задача 7.6. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1

Дано $W(j\omega) = k\dfrac{T_1\cdot j\omega+1}{(j\omega)^2\cdot(T_2\cdot j\omega+1)}$; $S_x(\omega) = \dfrac{A^2}{\omega^2}$; $S_n(\omega) = \gamma^2 = const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.7. Структурная схема следящей системы приведена на рис 7.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega\cdot(T\cdot j\omega+1)}; S_x(\omega)=\dfrac{2a^2\beta}{\omega^2+\beta^2}; S_n(\omega)=\gamma^2; \gamma=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.8. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{\omega_0^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_0\cdot(j\omega)}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2};$

$S_n(\omega)=a^2; a=const,$

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.9. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{\omega_0^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_0\cdot(j\omega)}; S_x(\omega)=\dfrac{k^2}{\omega^2}; S_n(\omega)=a^2; a=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.10. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{a}{bT\cdot j\omega+1}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^2}; S_n(\omega)=\dfrac{D_n\beta}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\beta^2}$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.11. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k}{T\cdot j\omega+1}; S_x(\omega)=\dfrac{a}{\omega^2+\alpha^2}; S_n(\omega)=c^2; c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.12. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k}{a\cdot(j\omega)^2+b\cdot(j\omega)+c}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}; S_n(\omega)=c^2; c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.13. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k_1k_2}{[T_1\cdot(j\omega)+1][T_2\cdot(j\omega)+1]}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2};$

$S_n(\omega)=c^2; c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.14. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k}{T^2\cdot(j\omega)^2+2\xi T\cdot(j\omega)+1}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2};$

$S_n(\omega)=c^2; c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.15. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega\cdot+(T\cdot j\omega+1)}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}; S_n(\omega)=c^2; c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.16. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k\cdot(T\cdot j\omega+1)}{(j\omega)^2}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}; S_n(\omega)=\dfrac{D_n\beta}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\beta^2}$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.17. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{k\cdot(T\cdot j\omega+1)}{(j\omega)^2}; S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}; S_n(\omega)=c^2; c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.18 Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{0{,}5\cdot j\omega+1}{0{,}25\cdot(j\omega)^2+\xi\cdot j\omega+1}$; $S_x(\omega)=\dfrac{1}{\omega^2+4}$; $S_n(\omega)=c^2$; $c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.19. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{b_1\cdot j\omega+b_0}{(a_1\cdot j\omega+a_0)(j\omega)}$; $S_x(\omega)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}$; $S_n(\omega)=c^2$; $c=const$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Задача 7.20. Структурная схема следящей системы приведена на рис.7.1.

Дано $W(j\omega)=\dfrac{1}{3\cdot j\omega+2}$; $S_x(\omega)=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(\omega^2+9)^2}$; $S_n(\omega)=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+4}$.

Определить D_{E1}, D_{E2}, D_E.

Лицензия ЛР № 020370 от 29.01.97

Составители Б.С. Гаспер, И.Н. Липатов

Корректор Л.Г. Ксенофонтова

Сдано в печать 11.03.99

Формат 60 × 84 / 16. Объем 4 п. л.

Тираж 100. Заказ 7.

Редакционно – издательский отдел и ротапринт

Пермского государственного технического университета