***Задача №4.* ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА**

**Условие задачи. Исходные данные.**

Вертикальный вал АК (рисунки в табл.(2) вращающийся с постоянной угловой скоростью $ω= $ 10 с-1 , закреплен подпятником в точку А и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл.1 (АВ = BD = DE = EK = *a*). К валу жестко прикреплены невесомый стержень 1 длиной ℓ₁ = 0,4 м с точечной массой m₁ = 6 кг на конце и однородный стержень 2 (ℓ₂ = 0,6 м), имеющий массу m₂ = 4 кг. Оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в табл. 1.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных расчетах принять *a*= 0,4 м.

 Исходные данные к задаче выбираются по табл.1 (вариант исходных данных выбирается по предпоследней цифре учебного шифра).

 Схема конструкции выбирается в табл. 2(по последней цифре учебного шифра).

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Места крепления и углы наклона | Предпоследняя цифра учебного шифра |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Подшипник в точке | B | D | E | K | B | D | E | K | D | E |
| Крепление стержня 1 в точке | D | B | D | D | E | K | B | E | E | K |
| Крепление стержня 2 в точке | K | E | B | E | D | B | K | B | K | D |
| $α$ ° | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 |
| $β$° | 45 | 60 | 75 | 30 | 60 | 45 | 30 | 75 | 60 | 45 |

 

 **Указания.** Задача 4 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче – стержня 2) имеют равнодействующую $\overbar{R}$u, то численно $R$u = m∙ *a*C , где $\overbar{a}$С – ускорение центра масс С стержня, но линия действия силы $\overbar{R}$u в общем случае не проходит через точку С.

 **Пример решения задачи 4.** С невесомым валом АВ, вращающимся с постоянной угловой скоростью $ω$, жестко скреплен стержень OD длиной ℓ и массой m₁,

имеющий на конце груз массой m₂ (рис.1). Определить реакции подпятника А и подшипника В.

*Решение.* Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала АВ, стержня OD и груза, применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси Аху так, чтобы стержень лежал в плоскости ху, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overbar{Р}$₁, $\overbar{Р}$₂, составляющие $\overbar{Х}$А , $\overbar{Y}$А реакции подпятника и реакцию $\overbar{Х}$В подшипника.

 Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно ($ω$ = const), то элементы связанной с ним системы тел (наклонный стержень и груз на его конце) имеют только нормальные ускорения $\overbar{a}$nk, направленные к оси вращения. Численно $a$nk = $ω$²∙hk, где hk – расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\overbar{F}$, будут направлены от оси вращения и численно $F$= $∆ m$∙$ a$nk =$∆ m$∙$ ω$²∙hk, где $∆ m$ - масса элемента. Поскольку все $\overbar{F}$пропорциональны hk , то опора этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\overbar{R}$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии Н₁ от вершины О, где Н₁ = $\frac{2}{3}$ Н₂ (Н₂ = ℓ∙cos $α$).

Но, как известно, равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а численно главный вектор сил инерции стержня $R$= m₁∙ *a*C, где *a*C – ускорение центра масс стержня. При этом, как и для любого элемента стержня, *a*C = *a*Cn = $ω$²∙hС = $ω$²∙ОС∙ sin$α$ (ОС = ½). В результате получим: $R$= m₁∙$ ω$²$\frac{l}{2}$ sin$α$ = 13,5 Н.

Аналогично для силы инерции $R$= m₂∙$ ω$²$l$ sin$α$ = 18 Н.

 Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости ху, то реакции подпятника А и подшипника В тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

 По принципу Даламбера приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой произвольной плоской системы уравнения равновесия, получим:

$\sum\_{}^{}F$kx = 0; ХА + ХВ + $R$+$F$=0

$\sum\_{}^{}F$kу =0; YA - P₁ - P₂ = 0,

 $\sum\_{}^{}m\_{B}$($\overbar{F}$k) = 0; ХА ∙(*а+b*) - P₁ $\frac{l}{ 2}$ sin$α$ - P₂∙ℓ∙ sin$α$ + $R$∙ (Н₁ +b) = 0.

 Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений , найдем искомые реакции.

Ответ: ХА = -11,8 Н, YA = 49,1 Н, ХВ = -19,7 Н. Знаки указывают, что силы $\overbar{Х}$А и $\overbar{Х}$В имеют направления, противоположные показанным на рис. 1.

***Задача №5.* ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ**

**ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

**Условие задачи. Исходные данные.**

 В кривошипно- шатунном механизме (табл. 2) к кривошипу ОА приложена пора сил с моментом М, а к ползуну В – сила $\overbar{F}$. Известны длины кривошипа ОА и шатуна АВ (табл. 1). Для заданного положения механизма определить силу $F$ (табл.2, схемы 0-4) при известной величине момента пары М, или определить момент пары М (табл. 2, схемы 5-9) при известной величине силы $F$ в положении равновесия.

 Схема механизма выбирается в табл. 2 по последней цифре учебного шифра.

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Длина | Предпоследняя цифра учебного шифра |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ОА, м | 0,2 | 0,4 | 0,7 | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 0,7 | 0,3 | 0,9 | 0,5 |
| АВ, м | 0,5 | 0,6 | 0,9 | 0,8 | 1,1 | 0,7 | 1,2 | 0,8 | 1,3 | 0,7 |



**Пример решения задачи 5.** Схема кривошипно-шатунного механизма показана на рис. 1.

Дано: ОА = 0,3 м; АВ = 0,5 м; М = 4 Н∙м.

Найти: силу $F$ в положении равновесия механизма.

Решение. Механизм находится под действием силы $\overbar{F}$ и пары сил с моментом М. Наложенные на него связи допускают следующие возможные перемещения: поворот кривошипа ОА на угол $δφ$ и смещение $δ$S₂ ползуна В по вертикали. Система имеет одну степень свободы. Уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений, получается в виде:

$\sum\_{}^{}δ$**Аk = M**$δφ$ **–** $F$ **∙**$ δ$**S₂ = 0 (1)**

 Найдем соотношение между $δφ$ и $δ$S₂. Повернув кривошип ОА на угол $δφ$, обнаруживаем, что шарнир А получил смещение $δ$S₁ . При этом

$δφ$ = $\frac{δS₁}{ОА}$ , где ОА = 0,3 м.

$δ$S₁ = VA∙$δ$t = ($ω$∙PA) $δt$ = PA $\left[ωδt\right]$

$δ$S₂ = VB∙$δ$t = ($ω$∙PB) $δt$ = PB$\left[ωδt\right]$

Найдем м.ц.с. для шатуна АВ (это точка Р, см рис. 1)

 $\frac{δS₁ }{δS₂}$ = $\frac{РА}{РВ}$ = $\frac{АВ∙\sin(30°)}{AB∙\cos(30°)}$ = $\frac{0,5∙0,5}{0,5∙0,86}$ = $\frac{0,25}{0,43}$ = 0,577,

откуда $ δ$S₁ =0,577∙ $δ$S₂

Подставим $δ$S₁ в $δφ$, представленное в (1):

 $δφ$ = $\frac{δS₁ }{ОА}$ = $\frac{0,577∙δS₂}{ОА}$ , где ОА = 0,3 м.

или $ δφ$ **=** $\frac{0,577∙δS₂}{0,3}$ **= 1,9** $δ$**S₂ (2)**

Подставив (2) в (1) получим:

М∙1,9 $δ$S₂ - $F$ ∙$ δ$S₂ = 0

или (1,9М – $F$) ∙$ δ$S₂ = 0

откуда $F$ = 1,9М = 1,9∙4 = 7,69 Н.

Ответ: $F$ = 7,69 Н.

***Задача №6.* ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ**

**Условие задачи. Исходные данные.**

 Однородный каток 3 массой m₃ и радиусом R₃ соединен гибкой нерастяжимой нитью с грузом 1 массой m₁. Нить переброшена через блок 2 массой m₂ (блок 2 считать однородным круглым диском). К оси катка 3 (табл. 2, схемы 2,6,7,9), или к грузу 1 (табл. 2, схемы 0,3,4,5,8), или к свободному концу нити (таблица 2, схема 1) приложена постоянная сила $\overbar{F}$. Каток катится без скольжения, коэффициент трения скольжения груза о плоскость f , угол наклона плоскости $α$ . К катку приложен тормозящий момент Мторм( табл. 2, схемы 0,1,3,4,5,8) или вращающий момент Мвр( табл. 2, схемы 2,6,7,9); трением в подшипнике блока 2 и трением качения при движении катка 3 пренебречь. Нить параллельна плоскости.

 Определить ускорение груза 1, используя общее уравнение динамики.

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
|  | Предпоследняя цифра учебного шифра |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| m₁, кг | 1 | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 |
| m₂, кг | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| m₃, кг | 4 | 1 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 5 | 2 |
| F, H | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| $$α°$$ | 30 | 45 | 30 | 60 | 45 | 30 | 45 | 60 | 30 | 60 |
| f | 0,10 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,28 |
| R₃, м | 0,3 | 0,1 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 0,6 | 0,2 |
| S, м | 2 | 3 | 1,5 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 |



**Пример решения задачи 6.** Схема механизма показана на рис. 1. Дано: m₁ = 4 кг; m₂ = 3 кг; m₃ = 5 кг; $F$ = 50Н; f = 0,2; R₃ = 0,2 м; Мвр = 2 Н∙м. Найти ускорение $W₁$тела 1.

**Указания.** Задача 6 – на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера – Лагранжа).

Запишем общее уравнение динамики Даламбера – Лагранжа:

$\sum\_{}^{}δА\_{k}^{а}$ **+** $\sum\_{}^{}δА\_{k}^{u}$ **= 0 (1)**

сумма элемен- сумма элемен-

тарных работ тарных работ

активных (задан- сил инерции

ных) сил

или

$\sum\_{}^{}F\_{k}^{a}$**∙** $δ$**S∙ cos (**$\overbar{F}\_{k}^{a}$**,** $\overbar{S}$**) +** $\sum\_{}^{}F\_{k}^{u}$**∙** $δ$**S∙ cos (**$\overbar{F}\_{k}^{u}$**,** $δ$$\overbar{S}$**k) = 0** (2)

 проекции сумм эле- проекции сумм

 ментарных работ элементарных

 активных сил работ сил инерции

 Система имеет одну степень свободы.

 Установим активные силы согласно рис. 1.

 m₁g – вес тела 1 (m₁ = 4)

телотттттт

Тело 1

 $F$тр1 – сила трения тела 1

 $F$тр1 = f∙N₁ = f∙ m₁g cos 60°;

 ( f = 0,2)

Тело 2

 m₂g – вес тела 2 (m₂ = 3)

 m₃g – вес тела 3 (m₃ = 5)

Тело 3

 $F$ = 50H

 Мвр = 2 Н∙м

Исходные данные : R₃ = 0,2 м

 Вычислим и приложим к телам 1,2,3 силы инерции, задавшись ускорение W₁.

Тело 1. Тело 1 движется поступательно,

$F\_{1}^{u}$ **= m W₁ = 4 W₁.**

Тело 2. Тело 2 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (центр масс расположен на оси вращения). Момент сил инерции этого тела определяется по формуле:

$М\_{2}^{u}$ **= J2z** $ε$**₂ , (*a*)**

где **J2z =** $\frac{1}{2}$ **m₂**$R\_{2}^{2}$ , а $ε$**₂ =** $\frac{W₁}{R₂}$ (см. рис. 1)

Подстановкой их в (*а*), получим:

$М\_{2}^{u}$ **=** $\frac{1}{2}$ **m₂**$R\_{2}^{2}$**∙** $\frac{W₁}{R₂}$ **=** $\frac{1}{2}$ **m₂**$R\_{2}^{}$ **W₁ =** $\frac{1}{2}$ **3**$R\_{2}^{}$ **W₁ = 1,5** $R\_{2}^{}$ **W₁**

Тело 3. Тело 3 совершает плоскопараллельное движение. Тогда

 $F\_{3}^{u}$ **= m₃ WC3 = 5 W₁**, т.к. WC3 = W₁ (см. рис. 1)

$М\_{3}^{u}$ **= J3z** $ε$**₃, (**$δ$**)**

где **J3z =** $\frac{1}{2}$ **m₃**$R\_{3}^{2}$, а $ε$**₃ =** $\frac{W₁}{R₃}$ , (см. рис. 1)

т.к. качение происходит без скольжения по аналогии с условием задачи 3, где «К» (см. рис. 1) – мгновенный центр скоростей.

Примечание. $ε$₃ получается так:

$ε$**₃ =** $\frac{dω₃}{dt}$ **=** $\frac{d}{dt}$$\left(\frac{V\_{C3}}{R₃}\right)$ **=** $\frac{1}{R₃}$$\frac{dV\_{C3}^{}}{dt}$ **;**

в соответствии с рис. 1 $V\_{C3}$ = $V\_{C1}$,

$ε$**₃ =** $\frac{1}{R₃}$$\frac{dV\_{C1}^{}}{dt}$ **=** $\frac{1}{R₃}$$W₁$**.**

Итак: $ε$**₃ =** $\frac{W₁}{R₃}$

Подставив J3z и $ε$₃ в ($δ$), получим:

$М\_{3}^{u}$ **=** $\frac{1}{2}$ **m₃**$R\_{3}^{2}$$\frac{W₁}{R₃}$ **=** $\frac{1}{2}$ **5** $R₃ W₁$

Сообщим механической системе возможное перемещение $δ$S₁.

 Составим уравнение элементарных работ всех активных сил и сил инерции соответствующее общему уравнению (1) динамики, т.е.

**-m₁g sin 60°∙**$ δ$**S₁ -** $F\_{1}^{u}$**∙**$ δ$**S₁ -** $F$**тр∙**$ δ$**S₁ -** $М\_{2}^{u}$**∙**$δφ$**₂ -**

**-m₃g sin20°∙**$δ$**SC3 -** $F\_{3}^{u}$**∙** $δ$**SC3 -** $М\_{3}^{u}$**∙**$δφ$**₃ +**

**+**$F$**∙**$ δ$**SC3 + Mвр∙**$ δφ$**₃ = 0 (3)**

 Поскольку система имеет одну степень свободы движения (в нашем случае $δ$S₁ ) вырази все перемещения через $δ$S₁ :

$δφ$**₂ =** $\frac{δS₁}{R\_{2}^{}}$ **;** $δ$**SC3 =** $δ$**S₁;** $δφ$**₃ =** $\frac{δS}{R₃}$

Подставив их в уравнение (3) и , предварительно, вытеснив за скобку $δ$S₁, получим:

(4∙9,8∙0,87 - 4$ W₁$ - 3,9 – 1,5$R\_{2}^{} W₁\frac{1}{R\_{2}^{}}$ - 5∙9,8∙0,34 –

- 5$ W₁$ - 2,5$ R₃ W₁$∙$\frac{1}{R₃}$ + 50 + 2∙ $\frac{1}{0,2}$)$ δ$S₁ = 0

Т.к. $δ$S₁ $\ne $ 0, то равно нулю выражение в скобках:

-34,1 - 4$ W₁$ - 3,9 – 1,5$ W₁$ - 16,7 - 5 $ W₁$ - 2,5$ W₁$ + 50 + +10 = 0,

или 13$ W₁$ = 5,3,

откуда $ W₁$ = 0,4 м/с²,

что полностью совпадает с результатом решения задачи 3.

Ответ: $W₁$ = 0,4 м/с².