**ЗАДАНИЕ № 1.**

Дана система линейных уравнений. Требуется показать, что система совместна и найти ее решение тремя способами: а) по формулам Крамера, выполнить проверку решения; б) методом Гаусса.

 **ПРИМЕР 1.**

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:**

Дана система линейных уравнений



Требуется показать, что система совместна, и найти ее решение тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса

**Решение.**

Система n линейных уравнений с n неизвестными является совместной и имеет единственное решение, так как определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных не равен нулю. Вычислим определитель системы методом разложения его по элементом строки. Разложим по первой строке:



Так как определитель системы не равен нулю, система уравнений совместна и имеет единственное решение.

а) Найдем решение системы по формулам Крамера

 , , ,

где D1 D2 D3 - определители, которые получаются из определителя D системы путем замены в нем соответственно 1-го, 2-го, 3-го столбцов коэффициентов при неизвестных x1 x2 x3 столбцом свободных членов уравнений, стоящих в правой части данной системы. Получим следующие три определителя:







Вычислить неизвестные , , .

Проверим это решение, подставив значения неизвестных во все уравнения системы. Получим  Решение верное.

б) Решим ту же систему уравнений методом Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу системы и приведем основную матрицу системы к треугольному виду или ступенчатому виду, если число уравнений окажется меньшим числа неизвестных. Приведение матрицы к треугольному виду, то есть такому, когда ниже (или выше) главной диагонали все элементы будут нулевые, а на главной диагонали - ненулевые, всегда возможно. Оно основано на следующих элементарных преобразованиях матрицы, соответствующих эквивалентным преобразованиям система:

1. Перестановка строк матрицы;
2. Перестановка столбцов;
3. Умножение всех элементов строки на одно и то же число;
4. Сложение элементов любой строки с соответствующими элементами любой другой строки;
5. Вычеркивание получившихся нулевых строк.

Вот решение одной системы методом последовательных исключений неизвестных:

Расширенная матрица 1-й шаг 2-шаг



Возвратимся теперь от матричной записи к системе уравнений. Из последней строки матрицы следует уравнение , откуда х3 = -3 Подставляя х3 = -3 в последнее уравнение (вторая строка расширенной матрицы) получим  или . Наконец, из первого уравнения системы (первая строка матрицы) найдем  Решение  такое же , как в случае (а). Оно уже проверено.

Существует модифицированный метод Гаусса, так называемый метод полного исключения неизвестных, в результате которого основная матрица системы преобразуется в каноническую матрицу, на главной диагонали которой остаются единицы, а все остальные элементы обращаются в нули. Таким образом сразу получается решение.

В основе этого метода лежит следующий алгоритм (строго определенный порядок действий)

1. Выберем разрешающую строку и в ней разрешающий элемент. Обычно это первый элемент первой строки, считая слева направо. Строки можно целиком переставлять, так что на первое место можно записать любую строку, в которой первый элемент не равен нулю.
2. Каждый элемент, разрешающий строки разделим на разрешающий элемент.
3. Элементы разрешающего столбца заменим нулями во всех строках матрицы, кроме разрешающей, где он буден равен единице.
4. Элементы столбцов, Которые были разрешающими на предыдущих шагах исключения, переписываем без изменения.
5. Остальные элементы пересчитаем по следующему правилу «прямоугольника»:



|  |
| --- |
| **Р** D2  D1 П |

Где П – пересчитываемый элемент, Р – Разрешающий, D1 и D2 – “диагональные”, И – искомый. Все эти элементы каждый раз должны быть вершинами воображаемого прямоугольника, образованного параллельными строками и столбцами. Искомый элемент записываем на месте пересчитываемого.

Вернемся к расширенной матрице данной системы и выполним эквивалентной преобразования по предложенной выше схеме полного исключения неизвестных. Рекомендуем читателю все пересчеты коэффициентов по правилу «четырехугольника» записывать подробно.

Данная расширенная матрица 1-й шаг 2-й шаг



3 - й шаг 4 – й шаг



Если в последней матрице вернуться к записи уравнений, то получим

, , , а это и есть решение данной системы.

Замечания: 1. Кружками обведены разрешающие элементы.

2. При переходе от 2-го шага к 3-му третью строку почленно разделили на 90/7.

**ЗАДАНИЕ № 2.**

Методом исключения неизвестных найти общее и базисные решения систем уравнений:



ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:

Методом исключения неизвестных найти общее и базисное

решение системы линейных уравнений 

**Решение.**

Это система двух уравнений с тремя неизвестными. Она совместна и неопределенна. Надо описать совокупность всех ее решений. В качестве базисных неизвестных данной системы можно взять те неизвестные, для которых определитель составленный из коэффициентов при нет известных, не равен нулю. Здесь три таких определителя, один из которых равен нулю . Следовательно, неизвестные х1 и х2 нельзя брать в качестве базисных. Примем за базисные неизвестные х1 и х2 , для которых определитель . Будем считать неизвестную х3 свободной и запишем систему в виде 

Или в матричной форме . Воспользуемся методом полного исключения неизвестных: 

**Общее решение:** 

Полагая в общем решении х3 = 0, получим базисное решение х1 = , 

Проверка базисного решения показывает, что оно удовлетворяет обоим уравнениям системы, то есть, является частным решением системы. Давая х3 любые другие числовые значения, получим бесчисленное множество частных решений.

Аналогично решаются системы с несколькими свободными неизвестными.

**ЗАДАНИЕ № 3.**

Даны вершины треугольника , , . Найти:

а) уравнения всех трех его сторон;

б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;

в) внутренний угол  треугольника в градусах и минутах;

г) длину высоты, проведенной из вершины ;

д) площадь треугольника.

 , 

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:

Даны вершины треугольника А(-3;-2), В(1;8), С(5;3).

Найти: а) уравнения всех трех его сторон;

б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;

в) внутренний угол А треугольника в градусах и минусах;

г) длину высоты, опущенной из вершины А;

д) площадь треугольника.

**Решение.**

**а)** Уравнения сторон найдем по формуле прямой, проходящей через две данные точки 

Уравнение стороны АВ: , или  (АВ).

Уравнение стороны АС:  или  (АС)

**б)** Каждая из прямых, уравнения которых только это найдены, разделяет плоскость на две полуплоскости, определяемые соответствующими неравенствами.

Чтобы определить знаки этих неравенств, возьмем координаты какой-нибудь точки заведомо расположенной внутри треугольника АВС (см. рисунок 1). Такой точкой является, например точка N (0;1) подставляя координаты этой точки в уравнения граничных прямых (сторон) в силу того, что точка N не лежит ни на одной сторон, получим следующую систему неравенств.  определяющих множество внутренних точек треугольника.

Рис. 1.

Система неравенств определяет множество точек, принадлежащих треугольнику АВС, включая его стороны.

**в)** Внутренний угол треугольника найдем, зная угловые коэффициенты сторон АВ и АС, образующих этот угол, по формуле .

Угловые коэффициенты прямых выложим по формуле .

Получим ; .

Тогда 

. Угол определяем с помощью таблицы тангенсов или калькулятора

**г)** Длину высоты AD⊥BC (рис. 1) найдем как расстояние от данной точки А(-3;-2) до данной прямой ВС: 5х + 4у – 37 = 0 по формуле

, где А, В, С – коэффициенты прямой, - координаты данной точки.

Получим  (мин. ед.)

**д)** Площадь треугольника можно вычислить несколькими способами.

Вычислить ее через координаты вершин треугольника по формуле .

Получим .

Итак, площадь треугольника SABC = 30 кв. ед.

**ЗАДАНИЕ № 4.**

|  |
| --- |
| Найти производные  следующих функций:        ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:  Найти производные  следующих функций (дается сложные и неявная функции):  **а)**  **Решение.**  По правилам дифференцирования дроби получим    **б)** .  **Решение.**  По правилам дифференцирования произведения получим    **в)**  **Решение.**  Дифференцируем как сложную функцию.    **г)**. Это неявная функция.  **Решение.**    , , .  **ЗАДАНИЕ № 5.**  Пользуясь правилом Лопиталя найти пределы функций:       ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:  **.**  С помощью правила Лопиталя вычислить пределы функций:   1. .   **Решение.**  Непосредственная подстановка х = 0 приводит к неопределенности вида , следовательно, можно применить правило Лопиталя: заменить предел отношения функций пределом отношения их производных.        **Решение.**  При  получим неопределенность вида , когда можно применить правило Лопиталя.      **ЗАДАНИЕ № 6.**  Исследовать функцию и построить ее график    ПРИМЕР РЕШЕНИЯ: |

Исследовать функцию  и построить ее график.

**Решение.**

Исследование выполним по примерной схеме, имеющейся в учебниках и практических руководствах. График можно строить либо по ходу исследования, либо конце исследования (рис.2).

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Область определения функции   .   1. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пусть , тогда . Пусть , тогда  или . Значит, график функции проходит через начало координат. 2. Проверить является ли функция четной, нечетной, общего вида.   .  Функция общего вида.   1. Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные). |  |

Вертикальная асимптота может быть в точке разрыва или на границе области определения. Здесь вертикальная асимптота .  , - предел слева в точке ;  - предел справа. Наклонные асимптоты вида  Найдем, если существуют конечные пределы  и .

Здесь 

Итак,  - уравнение наклонной асимптоты.

1. Найти интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции и точки экстремума.

Найдем производную первого порядка.



Найдем критические точки первого рода и выясним знаки  на полученных интервалах в окрестности критических точек. Критические точки: х1 = 0, х2 = 3, х3 = 1 - последняя н входит в область определения функции. Используя достаточные признаки экстремума, выясним, как меняет знак при переходе через критические точки слева направо. Возьмем непрерывный интервал , содержащий точку .

; . Так как при переходе через точку  производная  знак не имеет, то функция монотонно возрастает и  не является точкой экстремума.

Возьмем интервал , содержащий точку х = 3.

; . Здесь производная меняет знак с «-» на «+», значит, х =3 – точка минимума функции .

Итак, функция возрастает на интервалах  и , убывает на интервале (1;3).

1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

Вычислим производную второго порядка и найдем критические точки второго рода.

Критические точки второго рода, при которых  в нуль или существует, такие , , но эта последняя не входит в область определения функции. Остается точка х = 0. Проверим меняет ли знак  при переходе через эту точку. Возьмем интервал (-1;), содержащий точку х = 0. Вычислим , . Отсюда следует, что х = 0 – точка перегиба, . . Отсюда следует, что  - интервал выпуклости; ,  - интервалы вогнутости кривой.

**ЗАДАНИЕ №7.**

Найти частные производные и полный дифференциал функции :

****

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:

Найти частные производные и полный дифференциал функции

двух независимых переменных:

**а)** 

**Решение.**

Найти частные производные ; . Составим полный дифференциал по формуле .

Получим .

**б)** .

**Решение.**

Найдем частные производные



.

Составим полный дифференциал

.

**ЗАДАНИЕ № 8.**

Найти неопределенные интегралы:

1. ****
2. ****
3. 

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:

Найти неопределенные интегралы **а)** , **б) ,**

**в) , г) , д) .**

Предлагаемые интегралы можно , применив основные методы

интегрирования; метод замены переменной подстановка, метод

интегрирования по частям.

**Решение.**

**а)** ;

Подстановка:. Найдем дифференциалы обеих частей подстановки 

или . Произведем замену переменной в подынтегральном выражении и найдем интеграл .

**б) .**

В первом из интегралов, стоящих справа, введем подстановку . откуда  или . Таким образом, .

Второй интеграл справа является табличным .

Итак, , где , две произвольные постоянные суммы неопределенных интегралов объединяют в одну.

**в) **

Подстановка: 

Получим табличный интеграл типа  . Возвращаясь к прежней переменной, будем иметь .

**г) .** Найдем его методом интегрирования по частям по формуле .

Примем , .

В первом из этих двух равенств обе части дифференцируем, чтобы найти , а во втором интегрируем, чтобы найти . Получим ,  (здесь произвольную постоянную интегрирования принимаем равной нулю, поскольку достаточно хотя бы одного значения ).

Применив формулу интегрирования по частям, получим

**.**

**д) .**  Это интеграл от рациональной функции. Разложим подынтегральную функцию  на простейшие дроби по известному правилу, предварительно разложив знаменатель дроби на множители . Тогда , где A, B, M, N – неопределенные коэффициенты, которые надо найти. Приведя обе части последнего равенства к общему знаменателю, найдем

 .

Такое равенство отношений с одинаковыми знаменателями возможны только в случае равенства числителей, то есть .

Приравнивая коэффициенты при x в одинаковых степенях в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений

 Решение системы: 

Переходим к интегрированию

.

Приведем две задачи геометрического характера, связанные с вычислениями определенного интеграла.

**ЗАДАНИЕ № 9.**

Воспользовавшись соответствующим приложением предельного интеграла к задачам геометрии, найти следующее:

**Объем тела, образованного вращением вокруг оси фигуры, ограниченной линиями.**

**, , ;**

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Вычислить объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси фигуры, ограниченной линиями , ,, .

|  |
| --- |
| **Решение.**  Объем тела вращения находим по формуле |

**ТУТ ЕЩЕ ДОЛЖЕН БЫТЬ ГРАФФИК**

**ЗАДАНИЕ № 10.**

Найти область сходимости степенного ряда .



ПРИМЕР РЕШЕНИЯ:

Найти область сходимости степенного ряда .

**Решение.**

Область сходимости называется множество всех точек сходимости данного ряда. Найдем радиус и интервал сходимости.

.

Где . Радиус сходимости . Тогда интервал сходимости . Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала.

1. Подставим в данный степенной ряд . Получим числовой ряд . Этот ряд является расходящимся, так как не выполняется необходимое условие его сходимости .
2. Подставляя в степенной ряд , получим знакочередующийся числовой ряд , который расходится по той же причине: его общий член при  стремится к 1, а не к 0.

Итак, область сходимости данного степенного ряда  .