

## Теория вероятностей математическая статистика и случайные процессы

Контрольная работа [назад](#)

## Контрольная работа по курсу Теория вероятностей

Контрольная работа состоит из пяти задач, текст задачи и её параметры определяются по последней цифре пароля как указано в таблице. Для проверки преподавателю высылаются сразу все задачи, выполненные в редакторе Word . Контрольная может быть выполнена в письменном виде и отправлена по почте только по согласованию с деканатом. Работа, кроме ответов к задачам, должна содержать описание решения задач и номер решаемой задачи. Порядок решения задач значения не имеет, хотя логичнее решать задачи именно в написанном порядке.

Для выполнения контрольной работы вам необходимо ознакомиться с конспектом лекций по соответствующим разделам. В конспекте, кроме теоретического материала, рассмотрены также примеры, демонстрирующие решение задач, аналогичных задачам из контрольной работы. Кроме того, примеры решения подобных задач приведены в конце файла.

Вариант	Задача 1	Задача 2 Текст 3	Задача 3 Текст 4	Задача 4	Задача 5
0	Текст 1 $p=0,8$ $k=3$	$K=5$ $L=6$ $M=4$ $N=8$ $P=3$ $R=4$	$K=5$ $P=0,1$ $R=3$	Текст 5 $a=0$ $b=5$ $F(x)=c \cdot x^2$ $\alpha=2$ $\beta=3$ $p=0,7$	Текст 7 $\lambda=0,2$
1	Текст 2 $p=0,1$ $k=4$	$K=5$ $L=5$ $M=4$ $N=7$ $P=2$ $R=3$	$K=4$ $P=0,2$ $R=2$	Текст 6 $a=0$ $b=4$ $p(x)=c \cdot x^2$ $\alpha=2$ $\beta=3$ $p=0,7$	Текст 8 $\sigma=40$
2	Текст 1 $p=0,9$ $k=4$	$K=5$ $L=4$ $M=4$ $N=6$ $P=3$ $R=3$	$K=6$ $P=0,3$ $R=3$	Текст 5 $a=0$ $b=3$ $F(x)=c \cdot x^3$ $\alpha=1,5$ $\beta=2,5$ $p=0,8$	Текст 7 $\lambda=0,25$
3	Текст 2 $p=0,2$ $k=6$	$K=5$ $L=3$ $M=4$ $N=5$	$K=5$ $P=0,4$ $R=4$	Текст 6 $a=0$ $b=4$ $p(x)=c \cdot (x-1)$ $\alpha=1,5$	Текст 8 $\sigma=50$

		P=2 R=4		$\alpha=1,5$ $\beta=3$ $p=0,9$	
4	Текст 1 $p=0,7$ $k=5$	K=5 L=2 M=4 N=4 P=3 R=4	K=7 P=0,6 R=2	Текст 5 $a=0$ $b=4$ $F(x)=2cx$ $\alpha=1$ $\beta=2$ $p=0,6$	Текст 7 $\lambda=0,3$
5	Текст 2 $p=0,3$ $k=4$	K=4 L=3 M=5 N=3 P=3 R=2	K=6 P=0,1 R=3	Текст 6 $a=0$ $b=5$ $p(x)=2cx$ $\alpha=1,5$ $\beta=2,5$ $p=0,6$	Текст 8 $\sigma=45$
6	Текст 1 $p=0,85$ $k=3$	K=4 L=4 M=5 N=5 P=4 R=3	K=5 P=0,7 R=3	Текст 5 $a=0$ $b=5$ $F(x)=3cx$ $\alpha=1$ $\beta=2,5$ $p=0,75$	Текст 7 $\lambda=0,8$
7	Текст 2 $p=0,15$ $k=5$	K=4 L=5 M=5 N=4 P=2 R=4	K=6 P=0,8 R=4	Текст 6 $a=0$ $b=3$ $p(x)=c+x$ $\alpha=1$ $\beta=2,5$ $p=0,75$	Текст 8 $\sigma=35$
8	Текст 1 $p=0,6$ $k=3$	K=4 L=6 M=5 N=6 P=3 R=3	K=4 P=0,9 R=2	Текст 5 $a=1$ $b=10$ $F(x)=c(x-1)$ $\alpha=2$ $\beta=5$ $p=0,85$	Текст 7 $\lambda=0,35$
9	Текст 2 $p=0,25$ $k=4$	K=4 L=7 M=5 N=7 P=2 R=4	K=5 P=0,2 R=3	Текст 6 $a=0$ $b=6$ $p(x)=3cx$ $\alpha=4$ $\beta=5,5$ $p=0,85$	Текст 8 $\sigma=55$

**Текст 1.** Вероятность соединения при телефонном вызове равна  $p$ . Какова вероятность, что соединение произойдет только при  $k$ -ом вызове?

**Текст 2.** Вероятность появления поломок на каждой из  $k$  соединительных линий равна  $p$ . Какова вероятность того, что хотя бы две линии исправны?

**Текст 3.** В одной урне  $K$  белых шаров и  $L$  черных шаров, а в другой –  $M$  белых и  $N$  черных. Из первой урны случайным образом вынимают  $P$  шаров и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают  $R$  шаров. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

**Текст 4.** В типографии имеется  $K$  печатных машин. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна  $P$ . Построить ряд распределения числа работающих машин, построить функцию распределения этой случайной величины, найти МО, дисперсию, а также вероятность того, что число работающих машин будет не больше  $R$ .

**Текст 5.** Непрерывная случайная величина задана ее функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \text{приведено в таблице,} & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Найти параметр  $C$ , плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания случайной величины в интервал  $[a, b]$  и квантиль порядка  $p$ .

**Текст 6.** Непрерывная случайная величина задана ее плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \text{приведено в таблице,} & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Найти параметр  $C$ , функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания случайной величины в интервал  $[a, b]$  и квантиль порядка  $p$ .

**Текст 7.** Продолжительность телефонного разговора распределена по показательному закону с параметром  $l$  (1/мин.). Разговор по телефону - автомату прерывается через три минуты от начала разговора. Какова доля прерванных разговоров? Каким должно быть время до прерывания разговора, чтобы доля прерванных разговоров не превышала 1%?

**Текст 8.** Суточное потребление электроэнергии исправной печью является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним 1000 кВт/ч и СКО  $s$ . Если суточное потребление превысит 1100 кВт, то по инструкции печь отключают и ремонтируют. Найти вероятность ремонта печи. Каким должно быть превышение по инструкции, чтобы вероятность ремонта печи была равна 0,02?

Ссылки на лекционный материал даны в большой степени условно, т.к. при решении любой задачи используется не только указанная формула, но и ранее полученные знания. К примеру, для построения ряда распределения надо уметь вычислять вероятности событий, а это целая глава.

Задача 1: Глава 1 §1–5.

Задача 2: Глава 1 §3.5; §7; §8.

Задача 3: Глава 1 §9; Глава 2 §1; §2.

Задача 4: Глава 2 §4.

Задача 5: Глава 2 §5.

### Примеры решения задач.

**Пример решения задачи 1.** На предприятии три телефона. Вероятности их занятости равны соответственно 0,6; 0,4; 0,5. Какова вероятность того, что хотя бы два из них свободны?

Решение:

Введём следующие обозначения:

$A_1$ – занят первый телефон,  $P(A_1) = 0,6$ ;

$A_2$ – занят второй телефон,  $P(A_2) = 0,4$ ;

$A_3$ – занят третий телефон,  $P(A_3) = 0,5$ ;

$P\{\text{хотя бы два свободны}\} =$

$P\{\text{свободны два телефона или свободны три телефона}\} =$

при помощи введённых обозначений это можно записать так:

$$\begin{aligned}
 & P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = \\
 & \text{т.к. эти события несовместны, вероятность суммы событий равна} \\
 & \text{сумме вероятностей} \\
 & = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = \\
 & \text{т.к. события } A_1, A_2, A_3 \text{ независимы, вероятность произведения} \\
 & \text{событий равна произведению вероятностей} \\
 & = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + \\
 & P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = (1 - 0,6)(1 - 0,4) \cdot 0,5 + (1 - 0,6) \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,5) + \\
 & 0,6 \cdot (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,5) + (1 - 0,6)(1 - 0,4)(1 - 0,5) = \\
 & 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,62
 \end{aligned}$$

**Пример решения задачи 2.** В одной урне 3 белых шара и 2 чёрных шара, а в другой – 4 белых и 3 чёрных. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

Решение:

Введём следующие обозначения для событий:

H1 – из первой урны переложили белые шары,

H2 – из первой урны переложили два белых и один черный шар,

H3 – из первой урны переложили один белый и два черных шара.

Т.к. других вариантов вытащить из первой урны три шара нет, эти события составляют полную группу событий, и они несовместны. Найдём вероятности этих событий по формуле гипергеометрической вероятности:

$$P(H1) = P_{3,3}(3,3) = \frac{C_3^3 \cdot C_2^0}{C_5^3} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{1}{\frac{4 \cdot 5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(H2) = P_{3,3}(3,2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = \frac{\frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{6}{10}$$

$$P(H3) = P_{3,3}(3,1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = \frac{\frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{3}{10}$$

Введём событие А – после перекалывания из второй урны вытащили 4 белых шара. Вероятность этого события зависит от того, что во вторую урну переложили из первой. Найдём условные вероятности:

$$P(A/H1) = \{ \text{теперь во второй урне 10 шаров, из них 7 белых} \} \\ = P_{10,7}(4,4) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^0}{C_{10}^4} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

$$P(A/H2) = \{ \text{теперь во второй урне 10 шаров, из них 6 белых} \} \\ = P_{10,6}(4,4) = \frac{C_6^4 \cdot C_4^0}{C_{10}^4} = \frac{15}{3 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{14}$$

$$P(A/H3) = \{ \text{теперь во второй урне 10 шаров, из них 5 белых} \} \\ = P_{10,5}(4,4) = \frac{C_5^4 \cdot C_5^0}{C_{10}^4} = \frac{5}{3 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{1}{42}$$

Теперь найдём вероятность события А по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H1) \times P(A/H1) + P(H2) \times P(A/H2) + P(H3) \times P(A/H3) = 0,1 \times 1/6 + 0,6 \times 1/14 + 0,3 \times 1/42 = 0,0(6).$$

**Пример решения задачи 3.** Монету бросают 5 раз. Найти ряд распределения числа выпавших гербов, построить функцию распределения этой случайной величины, найти МО, дисперсию, а также вероятность того, что число выпавших гербов будет не меньше 1 и не больше 3.

Решение:

В этой задаче  $x$  – дискретная случайная величина, принимающая значения 0,1,2,3,4,5. Чтобы построить ряд распределения  $x$ , требуется найти вероятности, с которыми она принимает эти значения. В данном случае имеется последовательность испытаний по схеме Бернулли, т.к. испытания независимы, и вероятность успеха  $p=0,5$  одинакова во всех испытаниях (успех – выпадение герба). Тогда по формуле Бернулли при  $n=5$ ,  $p=0,5$ ,  $q=1-p=0,5$ :

$$P(\xi = 0) = C_5^0 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 = 0,03125;$$

$$P(\xi = 1) = C_5^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 = 0,15625;$$

$$P(\xi = 2) = C_5^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 = 0,3125;$$

$$P(\xi = 3) = C_5^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = 0,3125;$$

$$P(\xi = 4) = C_5^4 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0,15625;$$

$$P(\xi = 5) = C_5^5 \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^0 = 0,03125;$$

Теперь построим ряд распределения:

Значения $\xi$	0	1	2	3	4	5
вероятность	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Найдём мат. ожидание по формуле:

$$M\xi = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,03125 + 1 \cdot 0,15625 + 2 \cdot 0,3125 + 3 \cdot 0,3125 + 4 \cdot 0,15625 + 5 \cdot 0,03125 = 2,5$$

Найдём дисперсию:

$$D\xi = \sum_{i=1}^6 x_i^2 \cdot p_i - (M\xi)^2 = 0 \cdot 0,03125 + 1 \cdot 0,15625 + 4 \cdot 0,3125 + 9 \cdot 0,3125 + 16 \cdot 0,15625 + 25 \cdot 0,03125 - 2,5^2 = 1,25.$$

Выпишем в аналитическом виде функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ 0,03125, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 0,03125 + 0,15625 = 0,1875, & \text{если } 1 < x \leq 2; \\ 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 = 0,5, & \text{если } 2 < x \leq 3; \\ 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 + 0,3125 = 0,8125, & \text{если } 3 < x \leq 4; \\ 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 + 0,3125 + 0,15625 = 0,96875, & \text{если } 4 < x \leq 5; \\ 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 + 0,3125 + 0,15625 + 0,03125 = 1, & \text{если } 5 < x; \end{cases}$$

Найдём вероятность того, что число выпавших гербов будет не меньше 1 и не больше 3:

$$P\{1 \leq \xi \leq 3\} = P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 = 0,5.$$

#### Примеры решения задачи 4.

А) Непрерывная случайная величина задана ее функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ c(x^2 - 1) & 1 < x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найти параметр  $c$ , плотность распределения случайной величины, математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания случайной величины в интервал  $[1,5;2]$  и квантиль порядка 0,9.

Решение:

Найдём сначала плотность распределения как производную от функции распределения:

$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$ . Тогда

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ 2cx, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Теперь найдём параметр  $c$  из уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

Т.к. плотность на разных интервалах задана разными функциями, разбиваем область интегрирования на соответствующее количество интервалов.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 2cx dx + \int_3^{\infty} 0 dx = 2c \int_1^3 x dx = 2c \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = c \cdot 8 = 1,$$

тогда  $c = \frac{1}{8}$ .

Т.е. функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1) & 1 < x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найдём мат. ожидание по формуле:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

Опять разбиваем область интегрирования на три интервала

$$M\xi = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_1^3 \frac{2 \cdot x^2}{8} dx + \int_3^{\infty} 0 dx = \frac{1}{4} \int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{4} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{13}{6},$$

Дисперсию находим по формуле

$$\begin{aligned} D\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx - (M\xi)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_1^3 \frac{2 \cdot x^3}{8} dx + \int_3^{\infty} 0 dx - \left( \frac{13}{6} \right)^2 = \frac{1}{4} \int_1^3 x^3 dx - \left( \frac{13}{6} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^3 - \left( \frac{13}{6} \right)^2 = \\ &= 5 - \left( \frac{13}{6} \right)^2 \approx 0,306. \end{aligned}$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал [a,b] найдём по формуле

$$P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$$

В данном случае

$$P(1,5 \leq \xi \leq 2) = F(2) - F(1,5) = \frac{1}{8}(2^2 - 1) - \frac{1}{8}(1,5^2 - 1) = 0,21875$$

Квантиль порядка 0,9 – это решение уравнения  $F(x)=0,9$ :

$$\frac{1}{8}(x^2 - 1) = 0,9$$

$$x^2 - 1 = 7,2$$

$$x^2 = 7,2 + 1 = 8,2$$

$$x = \pm \sqrt{8,2}$$

$$x_1 = +\sqrt{8,2} = 2,86,$$

$$x_2 = -\sqrt{8,2} = -2,86 \text{ - не принадлежит интервалу, где функция распределения принимает значения от } 0 \text{ до } 1. \text{ Квантиль один: } x_{0,9} = 2,86.$$

Б) Непрерывная случайная величина задана ее плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ c(x-1), & \text{если } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найти параметр  $c$ , функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания случайной величины в интервал  $[a, b]$  и квантиль порядка  $p=0,9$ .



Решение:

Найдём параметр  $c$  из уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

Т.к. плотность на разных интервалах задана разными функциями, разбиваем область интегрирования на соответствующее количество интервалов.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 c(x-1) dx + \int_3^{\infty} 0 dx = c \int_0^3 (x-1) dx = c \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^3 = c \cdot \left( \frac{9}{2} - 3 \right) = 1,$$

тогда  $c = \frac{2}{3}$ .

Найдём функцию распределения по формуле

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

(т.к. переменная  $x$  стоит в пределе интегрирования, в выражении для плотности надо её заменить другой переменной, например,  $t$ ). Т.к. плотность распределения задаётся разными выражениями в зависимости от интервала, функция распределения так же будет задаваться разными выражениями на этих интервалах:

если  $x < 0$ ,  $F_x(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$

если  $0 \leq x \leq 3$ ,  $F_x(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{2}{3}(t-1) dt = \frac{2}{3} \left( \frac{t^2}{2} - t \right) \Big|_0^x = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} x,$

если  $x > 3$ ,  $F_x(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^3 \frac{2}{3}(t-1) dt + \int_3^{\infty} 0 dt = \frac{2}{3} \left( \frac{t^2}{2} - t \right) \Big|_0^3 = \frac{3^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$

Т.о. можно записать:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} x, & \text{если } 0 < x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найдём квантиль порядка 0,9: это решение уравнения  $F(x)=0,9$ :

$$\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x = 0,9 \Rightarrow x^2 - 2x = 2,7 \Rightarrow x^2 - 2x - 2,7 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение:

$$d = 14,8 \Rightarrow \text{два корня:}$$

$$x_1 = 2,92;$$

$x_2 = -0,92$  – этот корень не попадает в интервал, где

функция распределения принимает значения от 0 до 1.  $\Rightarrow x_{0,9} = 2,92$ .

Вероятность попадания в интервал находим аналогично задаче А).

### Примеры решения задачи 5.

А) Время безотказной работы прибора распределено по показательному закону с параметром  $\lambda = 1,2$  (1/год). Согласно инструкции прибор заменяют через 2 года эксплуатации. Найти вероятность безотказной работы до замены. Определить такой срок эксплуатации до замены, при котором доля отказавших приборов составит 0,05%.

Решение:

$\xi$  – время безотказной работы прибора.

$$P\{\text{безотказная работа до замены}\} = P\{2 \leq \xi\} = P\{2 \leq \xi \leq \infty\} = F_\xi(\infty) - F_\xi(2) =$$

{т.к. случайная величина распределена по показательному закону, её функция распределения известна и равна  $1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-1,2x}$ } =

$$1 - (1 - e^{-1,2 \cdot 2}) = e^{-2,4} = 0,0907$$

Для решения второй части задачи обозначим переменной  $t$  срок эксплуатации до замены.

$P\{\text{прибор отказал до срока}\} = P\{\xi \leq t\} = P\{0 \leq \xi \leq t\} = F_\xi(t) - F_\xi(0) = 0,05$  по условию. Т.о. получаем уравнение:

$$(1 - e^{-1,2t}) - (1 - e^{-1,2 \cdot 0}) = 1 - e^{-2,4} = 0,05;$$

Решаем уравнение относительно  $t$ :

$$e^{-1,2t} = 0,95, \text{ логарифмируем:}$$

$$-1,2 \cdot t = \ln 0,95; \text{ отсюда}$$

$$t = -\frac{\ln 0,95}{1,2} \approx 0,04 \text{ (1/год) т.е. приблизительно полмесяца.}$$

Б) Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним  $a = 0$ , и  $s = 1,6$  мм. Сколько процентов стандартных валиков изготавливает автомат? Каким должно быть допустимое отклонение от стандартного размера, чтобы количество стандартных валиков было не меньше 90%?

Решение:

Пусть  $\xi$  – отклонение диаметра от проектного размера.

Процент стандартных валиков – это, другими словами, вероятность того, что случайно выбранный валик будет стандартным. Т.к. отклонение в данной задаче может быть как в большую, так и в меньшую сторону, надо найти

$$P\{|\xi| \leq 2\} = P\{-2 \leq \xi \leq 2\} = F_{\xi}(2) - F_{\xi}(-2) =$$

т.к. это нормальное распределение, то функцию распределения можно вычислить либо через функцию  $\Phi_0(x)$ , либо через  $\Phi(x)$ , в зависимости от того, таблица какой из функций имеется в наличии:

$F_x(x) = 0,5 + \Phi_0((x-a)/s) = \Phi((x-a)/s)$ . Тогда искомая вероятность

$$= \Phi_0((2-0)/1,6) - \Phi_0((-2-0)/1,6) = \Phi_0(2/1,6) - \Phi_0(-2/1,6) =$$

{т.к. функция нечётная}

$$= \Phi_0(2/1,6) + \Phi_0(2/1,6) = 2 \times \Phi_0(2/1,6) = 2 \times \Phi_0(1,25) = 2 \times 0,39435 = 0,7887.$$

Т.е. процент стандартных валиков равен приблизительно 79%.

Для решения второй части задачи обозначим переменной  $t$  допустимое отклонение от стандартного размера. Получим неравенство:

$$P\{|\xi| \leq t\} = P\{-t \leq \xi \leq t\} = F_{\xi}(t) - F_{\xi}(-t) = \{\text{аналогичные рассуждения}\} \\ = 2 \cdot \Phi_0(t/1,6) \leq 0,9$$

по условию задачи. Тогда  $\Phi_0(t/1,6) \leq 0,45$ . Теперь в таблице функции  $\Phi_0$  находим значение, наиболее близкое к 0,45 и определяем аргумент, при котором функция принимает это значение. В данном случае аргумент равен 1,645, т.е.

$$t/1,6 = 1,645,$$

$$t = 1,645 \times 1,6 = 2,635$$

---

[назад](#)