Лабораторная работа №1

1. Тема лабораторной работы:

Исследование способов формирования нечетких множеств и операций над ними.

2. Цель лабораторной работы

Изучение методов построения нечетких множеств с использованием различных типов функций принадлежности. Ознакомится с наиболее распространенными логическими операциями над нечеткими множествами.

3. Краткие сведения из теории

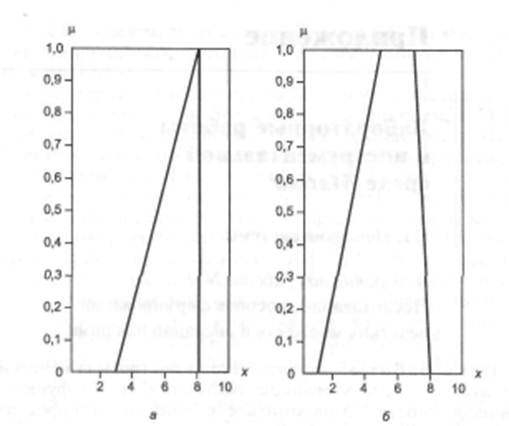
***Функции принадлежности*.** Инструментарий нечеткой логики (ИНЛ) в составе пакета *Matlab* содержит 11 встроенных типов функций принадлежности (ФП), формируемых на основе кусочно-линейных функций, распределения Гаусса, сигмоидной кривой, квадратических и кубических полиномиальных кривых. К наиболее простым ФП можно отнести треугольную и трапециевидную. Наименование треугольной ФП – ***trimf*** *(****tri****angle* ***m****embership* ***f****unction).* В параметрическом виде она представляет собой не что иное, как набор трех точек, образующих треугольник.

Описание функции:

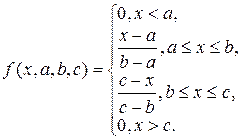
*у* = *trimf* (*x,* [*a b* с]),

где вектор *х* – базовое множество, на котором определяется ФП. Величины *а* и *с* задают основание треугольника, *b* – его вершину.

В аналитическом виде треугольная ФП может быть задана следующим образом (рис. П1, *а):*



**Рис. П1**. Треугольная (*а*) и трапециевидная (*б*) функции принадлежности

****

Далее рассмотрим примеры использования различных ФП в системе.

Примеры представляют собой фрагменты программ и комментариев на языке пакета *Matlab.*

**Пример П1. Программа использования ФП trimf.**

*х = 0* : *0,1 : 10; Задается базовое множество*

*у = trimf* (*x,* [*3 6 8*])*; Определяется треугольная ФП*

*plot* (*х, у*) *; Выводится график функции*

*xlabel* ('*trimf* (*x, P*)*, P =* [*3 6 8*]')*; Подписывается график под осью* *абсцисс*

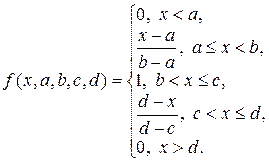
Трапециевидная ФП - ***trapmf*** *(****trap****ezoid* ***m****embership* ***f****unction)* – отличается от предыдущей функции лишь тем, что имеет верхнее основание. Описание функции:

*у = trapmf* (*х,* [*a b с d*]),

где параметры *а* и *d* –нижнее основание трапеции;

*b* и *с* –верхнее основание трапеции (рис. П1, *б).*

Аналитическая запись трапециевидной функции имеет вид:

****

Одно из основных достоинств треугольных и трапециевидных ФП – их простота. На основе функции распределения Гаусса можно построить ФП двух видов: простую функцию принадлежности Гаусса и двухстороннюю, образованную с помощью различных функций распределения Гаусса. Первая из них обозначается ***gaussmf****,* а вторая – ***gauss2mf****.*

Описание функции:

*у* = *gaussmf* (*x,* [*σ, с*])*.*

Симметричная функция Гаусса зависит от двух параметров *σ* и *с* (рис. П.2, *а):*

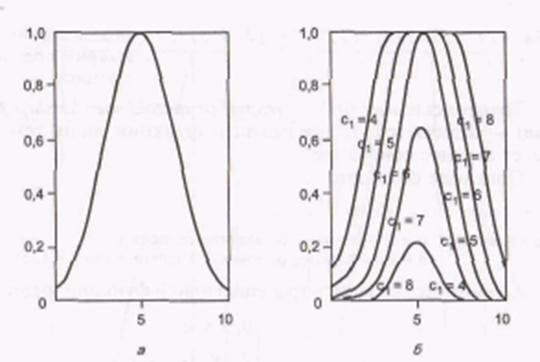
http://cde.kpi.kharkov.ua/courses/course_270/LR1.files/image008.gif

**Пример П2. Программа использования ФП gaussmf.**

*X = 0 : 0,1 : 10;*

*Y = gaussmf (х, [2 5]);*

*plot (х, у);*



**Рис. П2**. Простая (а) и двухсторонняя *(б)* функции принадлежности Гаусса.

Описание функции:

*у* = *gauss2mf (x, [σ1, с1, σ2, c2]).*

Последнее выражение является комбинацией двух различных функций распределения Гаусса. Первая определяется параметрами *σ1* и *с1* и задает форму левой стороны, а вторая (параметры *σ2, c2*)–правой стороны ФП.

Если *с1* < *c2*, то в этом случае функция gauss2mf достигает своего максимального значения на уровне 1. Иначе – максимальное значение функции меньше 1 (рис. П2, *б).*

**Пример ПЗ. Программа использования ФП gauss2mf.**

*х = (0 : 0,1 : 10)';*

*y1 =* *gauss2mf (x, [2 4 1 8]);*

*у2 = gauss2mf (x, [2 5 1 7]);*

*уЗ = gauss2mf (x, [2 6 1 6]);*

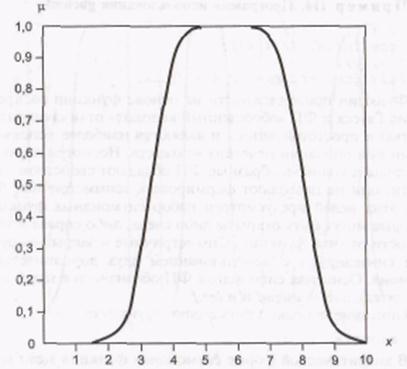
*у4* = *gauss2mf (x, [2 7 1 5]);*

*У5 = gauss2mf (x, [2 8 1 4]);*

*Plot (x, [y1 у2 уЗ у4 у5]);*

Символ *«'»* в строке определения базового множества *х* показывает транспонированность базового множества.

Следующей функцией, которая позволяет представлять нечеткие субъективные предпочтения, является ФП «обобщенный колокол» и обозначается *gbellmf (generalized bell shape membership function).*

**I**

gbellmf, P = [2 4 6]

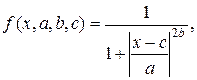
**Рис. П3**. Функция принадлежности «обобщенный колокол»

Ее отличие от рассмотренных ранее ФП заключается в добавлении третьего параметра, что позволяет осуществлять плавный переход между нечеткими множествами.

Описание функции:

*у* = *gbellmf (x, [а b с]) .*

Функция «обобщенный колокол» зависит от трех параметров и имеет следующую аналитическую запись:



где *с –* определяет расположение центра ФП; *а* и *b –* оказывают влияние на форму кривой (рис. ПЗ).

**Пример П4. Программа использования gbellmf.**

*х* = *0* : *0,1 : 10;*

*у = gbellmf (х, [2 4 6]);*

*plot (x, у);*

*xlabel('gbellmf, р* = *[2 4 61]').*

Функции принадлежности на основе функции распределения Гаусса и ФП “обобщенный колокол” отличаются гладкостью и простотой записи и являются наиболее используемыми при описании нечетких множеств. Несмотря на то, что гауссовы и колоколообразные ФП обладают свойством гладкости, они не позволяют формировать асимметричные ФП. Для этих целей предусмотрен набор сигмоидных функций, которые могут быть открыты либо слева, либо справа в зависимости от типа функции. Симметричные и закрытые функции синтезируют с использованием двух дополнительных сигмоид. Основная сигмоидная ФП обозначается ***sigmf****,* а дополнительные – ***dsigmf*** и ***psigmf.***

Описание основной сигмоидной функции:

*у* = *sigmf (х, [a с]).*

В аналитической форме сигмоидная функция ***sigmf***записывается следующим образом:

http://cde.kpi.kharkov.ua/courses/course_270/LR1.files/image016.gif

В зависимости от знака параметра *a* рассматриваемая ФП будет открыта или справа или слева (рис. П4, *а*), что позволит применять ее при описании таких нечетких понятий, как «очень большой», «крайне отрицательно» и др.

Описание дополнительной сигмоидной функции:

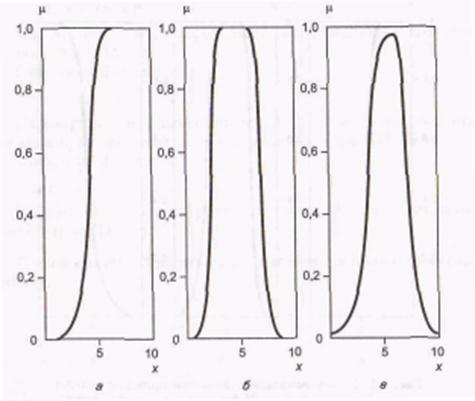
*у* = *dsigmf (x, (a1, c1, а2, с2]) .*

ФП ***dsigmf*** зависит от четырех параметров *a1, c1, а2* и *с2* и определяется как разность двух сигмоидных функций: *f(х, a1, c1) - f(x, а2, с2)* (рис. П4, *б*)*.*

Описание дополнительной сигмоидной функции:

*у* = *psigmf (x, [a1, c1, а2, с2]) .*

ФП *psigmf,* так же как и предыдущая функция, зависит от четырех параметров *a1, c1, а2, с2* и определяется как произведение двух сигмоидных функций *f(х, a1, c1) · f(x, а2, с2)* (рис. П4, *в*)*.*



**Рис. П4**. Сигмоилные функции принадлежности:

*а –* основная односторонняя; *б –* дополнительная двухсторонняя;

*в —* дополнительная несимметричная

**Пример П5. Программа использования сигмоидных функций.**

*х = 0 : 0,1 : 10; определяется базовое множество*

*subplot (1, 3, 1); формируется матрица графиков (3http://cde.kpi.kharkov.ua/courses/course_270/LR1.files/image020.gif1)*

*первый элемент – текущий*

*y=sigmf (x,[2 4]);*

*plot (х, у); выводится график в первый элемент матрицы*

*xlabel ('sigmf, P = [2 4]')*

*subplot (1, 3, 2); выбирается второй текущий элемент*

*у = dsigmf (x, [5 2 5 7]);*

*plot (х, у); выводится график во второй элемент матрицы*

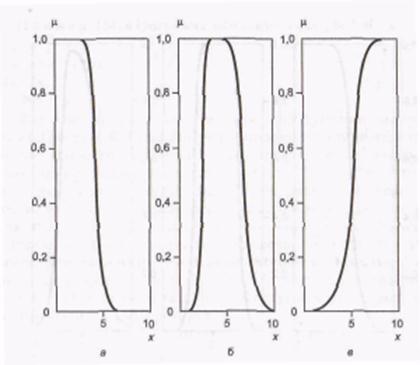
*xlabel ('dsigmf, Р* = *[5 2 5 7]')*

*subplot (1, 3, 3); выбирается третий текущий элемент*

*у* = *psigmf (x, [2 3 -5 8]);*

*plot (х, у);* *выводится график в третий элемент матрицы*

*xlabel ('psigmf, P =* *[2 3 -5 8]');*



**Рис. П5**. Полиномиальные функции принадлежности:

*а – Z*-функция; *б –* *PI*-функикя; *в –* *S*-функиия

Инструментарий нечеткой логики (fuzzy logic toolbox) в составе *Matlab* предоставляет возможность формирования ФП на основе полиномиальных кривых. Соответствующие функции называются ***Z***-функции *(****zmf****),* ***РI***-функции *(****pimf****)* и ***S***-функции *(****smf****).* Функция ***zmf***представляет собой асимметричную полиномиальную кривую, открытую слева (рис. П5, *а),* функция ***smf*** *–* зеркальное отображение функции ***zmf*** (рис. П5, *в).* Соответственно функция ***pimf***равна нулю в правом и левом пределах и принимает значение, равное единице, в середине некоторого отрезка (рис. П5, *б*).

Описание функции:

*у* = *zmf(x, [a b]).*

Параметры *а* и *b* определяют экстремальные значения кривой (рис. П5, *а).*

Описание функции:

*у* = *pimf (x, [a b с d]).*

Параметры *а* и *d* задают переход функции в нулевое значение, а параметры *b* и с – в единичное (рис. П5, *б).*

Описание функции:

*у* = *smf (х, [а b]) .*

Параметры *а* и *b* определяют экстремальные значения кривой (рис. П5, *в).*

**Пример П6. Программа использования полиномиальных кривых.**

*х = 0 : 0,1 : 10;*

*subplot(1, 3, 1);*

*у = zmf(x, (3 7]);*

*plot (х, у);*

*xlabel (' zmf, P = [3 7]');*

*subplot (1, 3, 2);*

*у = pimf(x, [1 4 5 10]);*

*plot (x, у);*

*xlabel ('pimf, P = [1 4 5 10]');*

*subplot (1, 3, 3);*

*у = smf (x, [1 8]);*

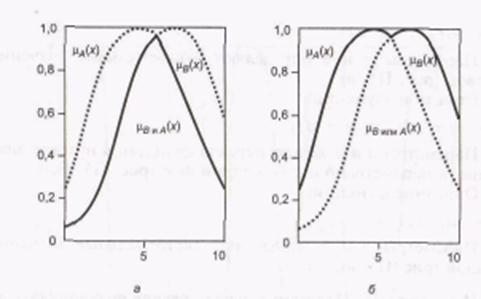
*plot(x, y);*

*xlabel ('smf, P=[1 8]').*

Помимо рассмотренных выше функций, позволяющих представлять нечеткие множества, в *Mattab* имеется возможность формировать собственные ФП или модифицировать встроенные.

***Операции с нечеткими множествами*.** Выделяют три основные логические операции с нечеткими множествами: конъюнкцию, дизъюнкцию и логическое отрицание. В среде *Matlab* существует возможность определять конъюнктивные и дизъюнктивные операторы с точки зрения минимаксной и вероятностной интерпретаций.

Рассмотрим минимаксную интерпретацию логических операторов, в которой конъюнктивный оператор представляет нахождение минимума – min (рис. П6, *а)*, а дизъюнктивный – максимум – max (рис. П6, *б).*



**Рис. П6.** Пересечение (*а*) и объединение (*б*) нечетких множеств

(минимаксная интерпретация)

Описание конъюнктивной функции: *у* = *min ([у1; у2]).*

Описание дизъюнктивной функции: *у* = *тах ([у1; у2]).*

Параметры *у1* и *у2* представляют собой исходные ФП. Функция min работает со списком ФП. В *Matlab* список оформляется квадратными скобками, а элементы списка разделяются точкой с запятой.

**Пример П7. Программа использования операций min и max.**

*x* = *0 : 0,1 : 10;*

*subplot (1, 2, 1);*

*y1* = *gaussmf (x, [3 5]);*

*у2 = gaussmf (x, [3 7]);*

*у3* = *min ([y1; y2]);*

*plot (x, [y1; у2],':'); построение исходных ФП пунктирной линией*

*hold on; включение механизма добавления кривой в текущий*

*график*

*plot (x, у3);*

*hold off; выключение механизма добавления кривой в текущий график*

*subplot (1, 2, 2);*

*у4 = max([y1; у2]);*

*plot(x, [y1; у2], ':');*

*hold on;*

*plot (x, y4);*

*hold off.*

Пунктирной линией на графиках изображены исходные ФП, а сплошной линией – результат действия логических операторов.

Минимаксная интерпретация является наиболее распространенной при построении нечетких систем. Тем не менее, на практике довольно часто используется альтернативная вероятностная интерпретация конъюнктивных и дизъюнктивных операторов. *Matlab* содержит соответствующие функции.

В рамках данной интерпретации конъюнктивный оператор представляет собой оператор вычисления алгебраического произведения – ***prod***(рис. П7, *а*), а дизъюнктивный оператор – оператор вычисления алгебраической суммы – ***рrоbоr***(рис. П7, *б*).

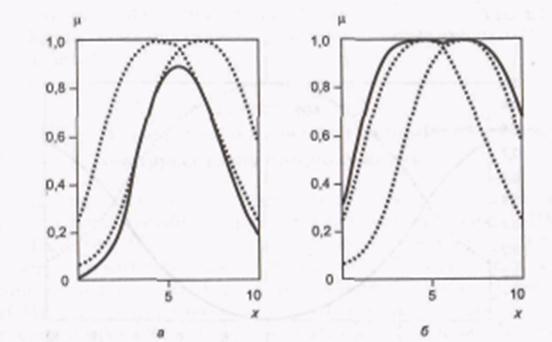


Рис. П7. Пересечение (*a*) и объединение *(б)* нечетких множеств

(вероятностная интерпретация)

Описание функции: *у = prod ([y1; у2])*

Описание функции: *у = probor([y1; у2]).*

Параметры *y1* и *у2* представляют собой исходные ФП

**Пример П8. Программа использования вероятностных операторов конъюнкции и дизъюнкции.**

*х = 0 : 0,1 : 10;*

*subplot (1, 2, 1);*

*y1* = *gaussmf (x, [3 5]);*

*y2* = *gaussmf (x, [3,7]);*

*у3* = *prod ([y1; y2]);*

*plot (x, [y1; у2],':');*

*hold on;*

*plot(x, y3);*

*hold off;*

*subplot (1, 2, 2);*

*y4 = probor ([y1; y2]);*

*plot (x, [y1; y2], ':');*

*hold on;*

*plot(x, y4);*

*hold off.*

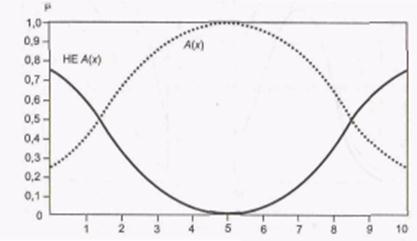


Рис. П8. Дополнение нечеткого множества.

Дополнение нечеткого множества есть не что иное, как математическое представление вербального выражения «НЕ *А*»(рис. П8), где *А –* нечеткое множество, описывающее некоторое размытое суждение.

Описание функции дополнения: *y = 1 – y\*,* где *у*\* *–* исходная ФП.

**Пример П9. Программа использования операции дополнения.**

*х = 0 : 0,1 : 10;*

*y1 = gaussmf(x, [3 5]);*

*у* = 1 - *y1;*

*plot (х, y1, ':');*

*hold on;*

*plot(x, y);*

*hold off.*

4. Индивидуальные задания

4.1. Построить треугольную и трапециевидную функцию принадлежности.

4.2. Построить простую и двухстороннюю функцию принадлежности Гаусса, образованную с помощью различных функций распределения.

4.3. Построить функцию принадлежности «обобщенный колокол», которая позволяет представлять нечеткие субъективные предпочтения.

4.4. Построить набор сигмоидных функций:

4.4.1. Основную одностороннюю, которая открыта слева или справа;

4.4.2. Дополнительную двухстороннюю;

4.4.3. Дополнительную несимметричную.

4.5. Построить набор полиномиальных функций принадлежности *(Z*-, *PI*- и *S*-функций).

4.6. Построить минимаксную интерпретацию логических операторов с использованием операций поиска минимума и максимума.

4.7. Построить вероятностную интерпретацию конъюнктивных и дизъюнктивных операторов.

4.8. Построить дополнение нечеткого множества, которое описывает некоторое размытое суждение, и представляет собой математическое описание вербального выражения отрицающего это нечеткое множество.

**При выполнении пунктов 4.1 – 4.8 индивидуального задания, значения переменных *a*, *b*, *c* и *d*, необходимо брать из приложения №1.**

5. Содержание отчета

5.1. Тема лабораторной работы.

5.2. Цель лабораторной работы.

5.3. Индивидуальное задание.

5.4. Результаты выполнения пунктов 4.1 − 4.8 индивидуального задания.

5.5. Выводы по лабораторной работе.

6. Контрольные вопросы

6.1. Что такое нечеткое множество и каково его основное отличие от обычного (четкого) множества?

6.2. Что такое функция принадлежности?

6.3. Какие конъюнктивные и дизъюнктивные операторы вы знаете?

Приложения №1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер студента в журнале группы | Параметры | | | |
| *a* | *b* | *c* | *d* |
| 15 | 5 | 8 | 12 | 13 |