МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

На правах рукописи

А.А.Айзикович
Т.С.Быкова

СБОРНИК ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ
по алгебре и аналитической геометрии
(линейные операторы)

Ижевск 2003

Электронная версия от 6 апреля 2009 г.

Предыдущая версия от 22 апреля 2002 года

УДК 514.12 (075.8)
А 37

Сборник типовых расчетов по алгебра и аналитическая геометрии (линейные операторы)

Составители: Айзикович А.А., к.ф.-м.н, доцент,
Быкова Т.С., ст. преподаватель

А 37 **Айзикович А.А., Быкова Т.С.** Сборник типовых расчетов по алгебре и аналитической геометрии (линейные операторы). — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2003. — 22 с.

Сборник содержит типовые задания по основным разделам дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия». В их полном объеме типовые расчеты предназначены для студентов первого курса, обучающихся по специальности 0730 — прикладная математика. Отдельные части расчетов будут также полезны студентам любых инженерно-технических специальностей.

Типовые расчеты могут быть использованы преподавателями математики как для организации самостоятельной работы студентов, так и для проведения контрольных мероприятий по аналитической геометрии, линейной алгебре и общей алгебре.

Оглавление

2 Линейная алгебра **4**

2.4 Типовой расчет «Линейные операторы» 4

Теоретические упражнения 4

Расчетные задания 6

Список литературы **20**

Список типовых расчетов **22**

Глава 2

Линейная алгебра

2.4 Типовой расчет «Линейные операторы»

Теоретические упражнения

1. Доказать, что всякий линейный оператор любую линейно зависимую систему векторов переводит в линейно зависимую.

2. Доказать, что в n-мерном пространстве для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \ldots, a_n$ и произвольной системы векторов $b_1, \ldots, b_n$ найдется единственный линейный оператор, переводящий a_i в b_i $(i = 1, \ldots n)$.

3. Доказать, что в одномерном линейном пространстве всякий линейный оператор имеет вид $x \mapsto \alpha x$, где α - некоторый скаляр.

4. Доказать, что если два линейных оператора ранга 1 имеют равные ядра и равные образы, то они перестановочны.

5. Пусть $\mathbb{A}$ — невырожденный линейный оператор, действующий в конечномерном линейном пространстве V, L — подпространство V. Доказать, что $\dim \mathbb{A}(L) = \dim \mathbb{A}^{-1}(L) = \dim L$.

6. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в пространстве V, L — подпространство V и $L \cap \ker \mathbb{A} = 0$. Доказать, что любая линейно независимая система векторов из L переводится оператором $\mathbb{A}$ в линейно независимую систему.

7. Доказать, что для линейного оператора $\mathbb{A}$ в n-мерном пространстве множество операторов $\mathbb{B}$ таких, что $\mathbb{A}\mathbb{B} = 0$, является линейным пространством, и найти его размерность.

8. Найти общий вид матриц линейных операторов в n-мерном пространстве, переводящих заданные линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_k$ $(k < n)$ в заданные векторы $b_1, \ldots, b_k$ в базисе вида $< a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n >$.

9. Найти общий вид матрицы линейного оператора $\mathbb{A}$, действующего в n-мерном пространстве, в базисе, первые k векторов которого составляют:

а) базис ядра оператора $\mathbb{A}$;

б) базис образа оператора $\mathbb{A}$.

10. Доказать, что для любой (быть может, бесконечной) совокупности перестановочных линейных операторов конечномерного пространства существует общий собственный вектор.

11. Доказать, что если оператор $\mathbb{A}^2$ имеет собственное значение λ^2, то одно из чисел λ и $-\lambda$ является собственным значением оператора $\mathbb{A}$.

12. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одинакового порядка, то матрицы AB и BA имеют совпадающие характеристические многочлены.

13. Доказать, что все характеристические числа матрицы отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

14. При каких условиях матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ побочной диагонали, равны нулю, подобна диагональной матрице?

15. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена матрица A. Найти собственные значения:

а) линейного оператора $\mathbb{B} : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, действующего по правилу $\mathbb{B}(X) = AX^T A$;

б) линейного оператора $\mathbb{B} : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, действующего по правилу $\mathbb{B}(X) = AXA^{-1}$ (матрица A невырожденная).

16. Доказать, что если $\mathbb{A}$ — невырожденное линейное преобразование пространства V, то всякое подпространство V, инвариантное относительно $\mathbb{A}$ инвариантно относительно $\mathbb{A}^{-1}$.

17. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — линейные операторы в конечномерном векторном пространстве и ранг оператора $\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}$ не превосходит 1. Доказать, что существует общий собственый вектор для $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

18. Найти жорданову форму матрицы:

а) A^2;

б) A^{-1} (A - невырожденная матрица),

если известна жорданова форма матрицы A.

19. Линейное преобразование $\mathbb{A}$ пространства V называется *инволютивным*, если $\mathbb{A}^2 = \mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ — тождественное преобразование. Выяснить геометрический смысл инволюливного преобразования.

20. Линейное преобразование $\mathbb{A}$ пространства V называется *идемпотентным*, если $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$. Выяснить геометрический смысл идемпотентного преобразования.

Расчетные задания

Задача 1. Пусть $\mathbf{e} =< \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$ и $\mathbf{e}' =< \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 >$ — два базиса вещественного линейного пространства, а $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ — арифметические векторы вектора $\mathbf{x}$ в базисах $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ соответственно.

1) Выяснить, являются ли линейными преобразования $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$.

2) Для линейного преобразования записать его матрицу в стандартном базисе $\mathbf{e}$ и базисе $\mathbf{e}'$.

3) Используя полученную матрицу, для соответствующего линейного преобразования найти образ $\mathbf{y}$ элемента $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'$ двумя способами: зная либо y, либо x'.

1. $\mathbb{A}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$,
   $\mathbb{B}x = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2)$,
   $\mathbb{C}x = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$.
2. $\mathbb{A}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2)$,
   $\mathbb{B}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3)$,
   $\mathbb{C}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3)$.
3. $\mathbb{A}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,
   $\mathbb{B}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
   $\mathbb{C}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3)$.
4. $\mathbb{A}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
   $\mathbb{B}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
   $\mathbb{C}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.

5. $\mathbb{A}x = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3, 4x_1 - 5x_2 - 6),$
$\mathbb{B}x = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3),$
$\mathbb{C}x = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6x_3).$

6. $\mathbb{A}x = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3),$
$\mathbb{B}x = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3),$
$\mathbb{C}x = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 3x_1 - 4x_2 - 5).$

7. $\mathbb{A}x = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
$\mathbb{B}x = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$
$\mathbb{C}x = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3).$

8. $\mathbb{A}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2 + 3),$
$\mathbb{B}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1^3 + 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{C}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

9. $\mathbb{A}x = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^4),$
$\mathbb{B}x = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{C}x = (2x_1 - x_2, 1, x_1 + 2x_2 + 3).$

10. $\mathbb{A}x = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$
$\mathbb{B}x = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7),$
$\mathbb{C}x = (x_3, 0, 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3).$

11. $\mathbb{A}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0),$
$\mathbb{B}x = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0),$
$\mathbb{C}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3^2, 0).$

12. $\mathbb{A}x = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_3^2),$
$\mathbb{B}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, 1),$
$\mathbb{C}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_3).$

13. $\mathbb{A}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1^2, x_2 + 2x_3),$
$\mathbb{B}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_2 + 2x_3),$
$\mathbb{C}x = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1, x_2 + 2).$

14. $\mathbb{A}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3),$
$\mathbb{B}x = (3x_1 + 2x_2 + 1, 0, x_1 - 2x_2 - 3),$
$\mathbb{C}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1^2 - 2x_2 - 3x_3).$

15. $\mathbb{A}x = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5),$
$\mathbb{B}x = (x_1, x_2^2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5),$
$\mathbb{C}x = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3).$

16. $\mathbb{A}x = (2x_1 + x_2, x_3^2, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$
$\mathbb{B}x = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$
$\mathbb{C}x = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4).$

17. $\mathbb{A}x = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
$\mathbb{B}x = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5),$
$\mathbb{C}x = (x_1, x_2^2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3).$

18. $\mathbb{A}x = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{B}x = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0),$
$\mathbb{C}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

19. $\mathbb{A}x = (2x_1^2 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{B}x = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{C}x = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3).$

20. $\mathbb{A}x = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
$\mathbb{B}x = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$
$\mathbb{C}x = (0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$

21. $\mathbb{A}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$
$\mathbb{B}x = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$
$\mathbb{C}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$

22. $\mathbb{A}x = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{B}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$\mathbb{C}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

23. $\mathbb{A}x = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3, x_1 + x_3, 0),$
$\mathbb{B}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3),$
$\mathbb{C}x = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3).$

24. $\mathbb{A}x = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 9x_1 + x_3),$
$\mathbb{B}x = (3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8, 9x_1 + x_3),$
$\mathbb{C}x = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 0).$

25. $\mathbb{A}x = (2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7, 8x_1 + x_3)$,
$\mathbb{B}x = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 0)$,
$\mathbb{C}x = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 8x_1 + x_3)$.

26. $\mathbb{A}x = (x_1^3 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 0)$,
$\mathbb{B}x = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
$\mathbb{C}x = (x_1 + 1, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$.

27. $\mathbb{A}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$\mathbb{B}x = (3x_1 - 2x_2 - 1, x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$\mathbb{C}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3^3, x_2 + 2x_3, 0)$.

28. $\mathbb{A}x = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$\mathbb{B}x = (2x_1 - x_2^3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 0)$,
$\mathbb{C}x = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.

29. $\mathbb{A}x = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2)$,
$\mathbb{B}x = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2)$,
$\mathbb{C}x = (x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6, 7x_1 + 8x_2)$.

30. $\mathbb{A}x = (x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
$\mathbb{B}x = (x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
$\mathbb{C}x = (x_2^3 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$.

1. $x = \{6, -1, 3\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

2. $x = \{1, 2, 4\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

3. $x = \{1, 3, 6\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

4. $x = \{2, 4, 1\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (3/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

5. $x = \{6, 3, 1\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

6. $x = \{1, 4, 8\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (5/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

7. $x = \{8, 4, 1\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/4)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

8. $x = \{2, 5, 10\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (6/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

9. $x = \{10, 5, 1\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

10. $x = \{1, 6, 12\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (7/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

11. $x = \{-12, 6, 1\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (7/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

12. $x = \{-1, 7, 14\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (8/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

13. $x = \{-3, 2, 4\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (1/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

14. $x = \{2, 4, 3\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (1/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

15. $x = \{2, 6, -3\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (2/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

16. $x = \{12, 3, -1\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (2/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

17. $x = \{1, -4, 8\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

18. $x = \{1, 4, -8\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

19. $x = \{7, -5, 10\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (4/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

20. $x = \{5, -5, -4\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

21. $x = \{1, -6, 6\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (5/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

22. $x = \{6, 6, 2\},$
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

23. $x = \{1, 7, -7\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (6/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

24. $x = \{7, 7, 2\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/7)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

25. $x = \{3, -8, 8\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (7/8)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

26. $x = \{1, -9, 9\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (8/9)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

27. $x = \{9, 9, 2\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (8/9)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

28. $x = \{3, -10, 10\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (9/10)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

29. $x = \{10, 10, 7\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (9/10)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -9\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

30. $x = \{1, 9, 18\}$,
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (10/9)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Задача 2. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbb{A}x = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\mathbb{B}x = (x_2, 2x_3, x_1)$. Для заданного линейного оператора найти

1) образ элемента x:

а) по определению оператора,

б) используя его матрицу в стандартном базисе вещественного линейного пространства,

2) ядро и образ.

1. $\mathbb{A}\mathbb{B}x$	2. $\mathbb{A}^2x$	3. $(\mathbb{A}^2 - \mathbb{B})x$
4. $\mathbb{B}^4x$	5. $\mathbb{B}^2x$	6. $(2\mathbb{A} + 3\mathbb{B}^2)x$
7. $(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2)x$	8. $(\mathbb{B}^2 + \mathbb{A})x$	9. $\mathbb{B}\mathbb{A}x$
10. $\mathbb{B}(2\mathbb{A} - \mathbb{B})x$	11. $\mathbb{A}(2\mathbb{B} - \mathbb{A})x$	12. $2(\mathbb{A}\mathbb{B} + 2\mathbb{A})x$
13. $(\mathbb{A} - \mathbb{B})^2x$	14. $(\mathbb{B} - 2\mathbb{A}^2)x$	15. $\mathbb{B}\mathbb{A}^2x$
16. $(3\mathbb{A}^2 + \mathbb{B})x$	17. $(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B})x$	18. $(\mathbb{A}^2 - \mathbb{B}^2)x$
19. $(2\mathbb{B} - \mathbb{A}^2)x$	20. $\mathbb{B}^3x$	21. $(\mathbb{B}^2 - 2\mathbb{A}x)$
22. $(\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{A}))x$	23. $(\mathbb{A}\mathbb{B}^2)x$	24. $(\mathbb{A}(\mathbb{B} - \mathbb{A}))x$

25. $2(\mathbb{B}+2\mathbb{A}^2+\mathbb{B}^2)x$ 26. $(\mathbb{B}(\mathbb{A}-\mathbb{B}))x$ 27. $(\mathbb{B}-\mathbb{A}+\mathbb{B}^2)x$

28. $(\mathbb{B}(\mathbb{A}+\mathbb{B}))x$ 29. $(\mathbb{A}+\mathbb{B}\mathbb{A}-\mathbb{B})x$ 30. $(3\mathbb{B}+2\mathbb{A}^2)x$

Задача 3. Найти матрицу линейного оператора в базисе $<\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'>$, где

$\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,$
если она задана в базисе $<\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3>$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Доказать линейность, найти матрицу в базисе $<\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}>$, образ и ядро оператора, осуществляющее заданное преобразование.

1. Проектирование на ось Ox.
2. Проектирование на плоскость $z = 0$.
3. Проектирование на ось Oz.
4. Зеркальное отражение относительно плоскости Oyz.
5. Проектирование на ось Oy.
6. Проектирование на плоскость $y = 0$.
7. Зеркальное отражение относительно плоскости $x - y = 0$.
8. Зеркальное отражение относительно плоскости $y + z = 0$.
9. Проектирование на плоскость $y - z = 0$.
10. Проектирование на плоскость $y = \sqrt{3}x$.
11. Проектирование на плоскость Oyz.
12. Зеркальное отражение относительно плоскости $x - z = 0$.
13. Зеркальное отражение относительно плоскости Oxy.
14. Поворот относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении.
15. Проектирование на плоскость $x - y = 0$.

16. Проектирование на плоскость $y + z = 0$.

17. Зеркальное отражение относительно плоскости $x + y = 0$.

18. Зеркальное отражение относительно плоскости $y - z = 0$.

19. Проектирование на плоскость $x + y = 0$.

20. Проектирование на плоскость $x - z = 0$.

21. Зеркальное отражение относительно плоскости $x + z = 0$.

22. Поворот относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$.

23. Проектирование на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$.

24. Зеркальное отражение относительно плоскости Oxz.

25. Поворот в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$.

26. Проектирование на плоскость $x + z = 0$.

27. Проектирование на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$.

28. Проектирование на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$.

29. Проектирование на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$.

30. Поворот относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.

Задача 5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, действующего в комплексном линейном пространстве и заданного матрицей в некотором базисе.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найти базис, в котором матрица имеет канонический вид, и найти этот вид. Сделать проверку.

1. $\begin{pmatrix} 4,5 & 1 & -4,5 \\ -7,5 & 0 & 7,5 \\ -2,5 & 1 & 2,5 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -14 & 1 & 15 \\ -6 & 1 & 6 \\ -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & -6 \\ 9 & 2 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -15 & -12 & 15 \\ -10 & -9 & 13 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1,5 & 5,5 & 1,5 \\ 0,5 & 0,5 & 3,5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -12 & 18 & 17 \\ 1 & 4 & -1 \\ -9 & 10 & 14 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1,5 & 4,5 & -1,5 \\ -0,5 & 1,5 & 6,5 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 28 & -20 & -21 \\ 19 & -12 & -19 \\ 12 & -11 & -5 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 5 & 9 & -5 \\ 3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} -1,5 & -2 & -1,5 \\ -0,5 & -2 & 0,5 \\ -2,5 & 6 & -0,5 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -0,5 & -8 & -4,5 \\ -2,5 & 0 & 2,5 \\ 3,5 & -6 & -8,5 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 8 & -27 & -14 \\ 1 & -8 & -1 \\ 6 & -11 & -12 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -22 & 31 & 15 \\ -8 & 9 & 8 \\ -6 & 13 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -4 & 0,5 & -3 \\ 9 & 1 & 11 \\ -4 & -0,5 & -5 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 13 & -1 & 11 \\ 7 & 0 & 6 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} -16 & -1 & -20 \\ -17 & 0 & -21 \\ 9 & 1 & 13 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} -1,5 & 0,5 & -4,5 \\ 10 & 5 & 12 \\ -4,5 & -0,5 & -1,5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} -10 & -0,5 & -15,5 \\ 6 & 6,5 & 5,5 \\ 5 & 0,5 & 10,5 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} -9 & -1 & -9 \\ -4 & -2 & -5 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} -4 & 0,5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -0,5 & -2 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} -2 & 0,5 & 2,5 \\ -3 & -3,5 & -2,5 \\ 4 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$. 28. $\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 6,0 \\ -1,5 & -4,5 & -2,0 \\ -2,5 & 0,5 & -8,0 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 16 \\ 1 & -6 & 1 \\ -9 & 1 & -15 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} -9 & 1 & -1 \\ -7 & -6 & -6 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Найти базис, в котором матрица имеет канонический вид, и найти этот вид. Сделать проверку.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

28. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

29. $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

30. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987. — 496 с.;

[2] *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 2001. — 496 с.

[3] *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1969. — 256 с.

[4] *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М.: Высш. шк., 1983. — 176 с.;

[5] *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — 2-е изд., доп. — М.: Высш. шк., 1994. — 206 с.

[6] *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.

[7] *Окунев Л.Я.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Просвещение, 1964. — 184 с.

[8] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1978. — 384 с.

[9] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999. — 384 с.

[10] *Сборник залач по алгебре* /Под ред. Кострикина А.И. — М.: Факториал, 1995. — 454 с.

[11] *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1968. — 304 с.

[12] *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты).— 2-е изд., перераб. — М.: Высш. школа, 1999. — 126 с.

Список типовых расчетов

Аналитическая геометрия

1. Векторная алгебра
2. Линии и поверхности второго порядка

Линейная алгебра

1. Системы линейные уравнений
2. Линейные пространства
3. Евклидовы пространства
4. Линейные операторы
5. Билинейные и квадратичные формы

Общая алгебра

1. Комплексные числа
2. Алгебраические структуры

Учебное издание

Александр Аркадьевич Айзикович
Татьяна Сергеевна Быкова

Сборник типовых расчетов
по алгебре и аналитической геометрии
(линейные операторы)

В авторской редакции

Компьютерная верстка *А.А.Айзикович, Т.С.Быкова, Т.М.Щенина*
Корректор *И.О.Фамилия*

Оригинал-макет подготовлен с помощью издательской системы
$\LaTeX\,2_\varepsilon$ (MiKTeX) на оборудовании кафедры ПМИ ИжГТУ

Издательство ИжГТУ. Лицензия ЛР №020885 от 24.05.99.
Подписано в печать 00.00.2002. Бумага офсетная. Формат 60x84/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 00,00. Уч.-изд.л. 00,00.
Тираж 100 экз. Заказ №000.

Типография Издательства ИжГТУ.
Лицензия РФ ПД №00525 от 28.04.2000.
426069, г.Ижевск, ул.Студенческая,7.