МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

На правах рукописи

А.А.Айзикович
Т.С.Быкова

СБОРНИК ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ
по алгебре и аналитической геометрии
(евклидовы пространства)

Ижевск 2003

Электронная версия от 14 ноября 2007 г.
Предыдущая версия от 22 апреля 2002 года

УДК 514.12 (075.8)

А 37

Сборник типовых расчетов по алгебре и аналитической геометрии» (евклидовы пространства)

Составители: Айзикович А.А., к.ф.-м.н, доцент,
Быкова Т.С., ст. преподаватель

Сборник содержит типовые задания по основным разделам дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия». В их полном объеме типовые расчеты предназначены для студентов первого курса, обучающихся по специальности 0730 — прикладная математика. Отдельные части расчетов будут также полезны студентам любых инженерно-технических специальностей.

Типовые расчеты могут быть использованы преподавателями математики как для организации самостоятельной работы студентов, так и для проведения контрольных мероприятий по аналитической геометрии, линейной алгебре и общей алгебре.

Оглавление

Глава 2

Линейная алгебра

2.4 Типовой расчет «Евклидовы пространства»

Теоретические упражнения

1. Из свойств евклидова скалярного умножения $(x, y) = (y, x)$ и $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ вывести следуещее его свойство:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$$

для любых векторов x, y, z и любых действительных чисел α, β.

2. Из свойств унитарного скалярного умножения $(x, y) = \overline{(y, x)}$ и $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ вывести следуещее его свойство:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z)$$

для любых векторов x, y, z и любых комплексных чисел α, β.

3. Показать, что скалярный квадрат любого вектора комплексного евклидова пространства есть действительное число.

4. Показать, что линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства, рассматриваемое с тем же скалярным произведением, является евклидовым (унитарным) пространством.

5. Пусть в линейном пространстве заданы две операции скалярного умножения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$. Показать, что для любых чисел $\lambda \geq 0$

и $\mu \geq 0$, одновременно не равных нулю, операцией скалярного умножения будет и $(x,y) = \lambda(x,y)_1 + \mu(x,y)_2$.

6. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов x и y в некотором базисе вещественного линейного двумерного пространства. Найти условия на вещественные коэфициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}, необходимые и достаточные для того, чтобы функция

$$F(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2$$

задавала евклидово скалярное произведение.

7. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов x и y в некотором базисе комплекного линейного двумерного пространства. Найти условия на комплексные коэфициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}, необходимые и достаточные для того, чтобы функция

$$F(x,y) = a_{11}x_1\bar{y_1} + a_{12}x_1\bar{y_2} + a_{21}x_2\bar{y_1} + a_{22}x_2\bar{y_2}$$

задавала унитарное скалярное произведение.

8. Показать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение может быть задано формулой:

а) $(p,q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — коэффициенты многочленов p и q;

б) $(p,q) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(a)q^{(k)}(a)$ где $p^{(k)}(a)$ и $q^{(k)}(a)$ — производные k-го порядка, вычисленные в некоторой точке a вещественной оси.

9. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — попарно различные вещественные числа. Доказать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n $(n < m)$ с вещественными коэфициентами можно задать формулой

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g(t_k).$$

Является ли эта функция евклидовым скалярным произведением, если $m \leq n$?

10. Проверить, что:

1) в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с обычными операциями сложения и умножения на число скалярное произведение может быть задано формулой

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt;$$

2) в комплексном линейном пространстве комплексных функций вещественной переменной, непрерывных на отрезке $[a,b]$ с обычными операциями сложения и умножения на число скалярное произведение может быть задано формулой

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

11. Доказать, что равенство $|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

12. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ угол между двумя соседними векторами $f_n = t^{n-1}$ и $f_{n+1} = t^n$ системы векторов $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

13. Доказать, что если подпространство евклидова пространства инвариантно относительно линейного оператора $\mathbb{A}$, то его ортогональное дополнение инвариантно относительно $\mathbb{A}^*$.

14. Доказать, что ядро и образ сопряженного оператра $\mathbb{A}^*$ являются ортогональными дополнениями соответственно к образу и ядру оператора $\mathbb{A}$.

15. Доказать, что проектирование евклидова пространства $L_1 \oplus L_2$ на подпространство L_1 параллельно L_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 ортогональны.

Расчетные задания

Задача 1. Обозначим через x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 координаты векторов x и y в некотором базисе трехмерного вещественного линейного пространства. Определить, может ли заданная функция $F(x,y)$ служить скалярным произведением.

1. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.
2. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

3. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 4x_3y_3$.

4. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 - 4x_3y_3$.

5. $F(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$.

6. $F(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$.

7. $F(x,y) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

8. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 - 2x_3y_3$.

9. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$.

10. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2 + x_3y_3$.

11. $F(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$.

12. $F(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3$.

13. $F(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

14. $F(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$.

15. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

16. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

17. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

18. $F(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2 - 4x_3y_3$.

19. $F(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 4x_3y_3$.

20. $F(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 - 4x_3y_3$.

21. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_2 + 4x_3y_3$.

22. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_2 - 4x_3y_3$.

23. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3$.

24. $F(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3$.

25. $F(x,y) = 4x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

26. $F(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 - 2x_3y_3$.

27. $F(x,y) = 4x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

28. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_2 - 2x_3y_3$.

29. $F(x,y) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

30. $F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 - 2x_3y_3$.

Задача 2. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов x и y в некотором базисе n-мерного комплексного линейного пространства. Определить, может ли заданная функция $F(x,y)$ служить скалярным произведением.

1. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

2. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

3. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

4. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (-1+i)x_1\bar{y}_2 - (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

5. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (-1+i)x_1\bar{y}_2 - (1+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

6. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 - (1+i)x_1\bar{y}_2 + (-1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

7. $F(x,y) = x_1\bar{y}_1 - (1+i)x_1\bar{y}_2 + (-1+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

8. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

9. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

10. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

11. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

12. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (-2+i)x_1\bar{y}_2 - (2+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

13. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (-2+i)x_1\bar{y}_2 - (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

14. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 - (2+i)x_1\bar{y}_2 + (-2+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$

15. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 - (2+i)x_1\bar{y}_2 + (-2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

16. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

17. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

18. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

19. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

20. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (-1+i)x_1\bar{y}_2 - (1+i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

21. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (-1+i)x_1\bar{y}_2 - (1+i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

22. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 - (1+i)x_1\bar{y}_2 + (-1+i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

23. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 - (1+i)x_1\bar{y}_2 + (-1+i)x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2.$

24. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

25. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

26. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

27. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2-i)x_1\bar{y}_2 + (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

28. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (-2+i)x_1\bar{y}_2 - (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

29. $F(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (-2+i)x_1\bar{y}_2 - (2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

30. $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 - (2+i)x_1\bar{y}_2 + (-2+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2.$

Задача 3. В двумерном комплексном арифметическом пространстве скалярное произведение задано как функция компанент x_1, x_2 и y_1, y_2 векторов x и y.

1) Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из данных векторов $< f_1, f_2 >$:

а) по определению матрицы Грама;

б) используя связь матриц Грама различных базисов.

2) Найти выражение скалярного произведения векторов x, y через их компаненты в базисе $< f_1, f_2 >$.

1. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2,$

   $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$

2. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2,$

   $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$

3. $(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2,$

   $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$

4. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2,$

   $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$

5. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

7. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

8. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

9. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

10. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

11. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

12. $(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

13. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

14. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

15. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1-2i)x_1\bar{y}_2 + (1+2i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16. $(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1-2i)x_1\bar{y}_2 + (1+2i)x_2\bar{y}_1 + 6x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

17. $(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

18. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 - 2ix_1\bar{y}_2 + 2ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

19. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

20. $(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

21. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

22. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2+i)x_1\bar{y}_2 + (2-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

23. $(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

24. $(x,y) = 4x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

25. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

26. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,

$$f_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

27. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

28. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

29. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

30. $(x,y) = 2x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Векторы x и y трехмерного вещественного евклидова пространства заданы в базисе $< e_1, e_2, e_3 >$ координатными столбцами ξ и η соответственно, и известна матрица Грама Γ_f базиса $< f_1, f_2, f_3 >$.

1) Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $< e_1, e_2, e_3 >$.

2) Скалярное произведение векторов x и y:

а) используя выражение скалярного произведения в базисе $< e_1, e_2, e_3 >$;

б) используя выражение скалярного произведения в базисе $< f_1, f_2, f_3 >$.

1. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = -e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

10. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

11. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

12. $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13. $f_1 = e_1,\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = -e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

15. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

16. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

17. $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

18. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

20. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

21. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

22. $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

23. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = -e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

25. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 - e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$
$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

26. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 - e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

27. $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\ f_3 = e_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

28. $f_1 = e_1,\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = -e_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

29. $f_1 = -e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

30. $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства с заданным скалярным произведением:

1. $(1, 2, 1, 0)^T$, $(1, 1, 1, 1)^T$, скалярное произведение стандартное.
2. $(1, 2, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$, $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.
3. $(1, 1, 2, 0)^T$, $(1, 2, 2, 1)^T$, скалярное произведение стандартное.
4. $(2, 1, 0)^T$, $(1, 2, -1)^T$, $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

5. $(1+i, 1-i, 1)^T$, $(i, 1-i, 1)^T$, скалярное произведение стандартное.
6. $(-1, 1+i, 0)^T$, $(0, 1, i)^T$, скалярное произведение стандартное.
7. $(1, 2, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$, $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.
8. $(1, 0, 2, 3)^T$, $(1, 2, 2, 1)$, скалярное произведение стандартное.
9. $(2, 1, 0)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3$.
10. $(-1, 1, i)^T$, $(2+i, 1, 1+2i)^T$, скалярное произведение стандартное.
11. $(1, 2, 1, 0)^T$, $(2, 3, 2, 1)$, скалярное произведение стандартное.
12. $(1, 2, 0)^T$, $(3, 2, -1)^T$, $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.
13. $(1, 1, 2, 0)^T$, $(2, 3, 4, 1)$, скалярное произведение стандартное.
14. $(2, 1, 0)^T$, $(1, 2, -1)^T$, $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.
15. $(2+i, 2-i, 1)^T$, $(i, 1-i, 1)^T$, скалярное произведение стандартное.
16. $(-1, 1+i, 0)^T$, $(-1, 2+i, i)^T$, скалярное произведение стандартное.
17. $(1, 2, 0)^T$, $(4, 2, -1)^T$, $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.
18. $(1, 0, 2, 3)^T$, $(3, 2, 4, 7)^T$, скалярное произведение стандартное.
19. $(2, 1, 0)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3$.
20. $(-1, 1, i)^T$, $(i, 3, 1+4i)^T$, скалярное произведение стандартное.
21. $(2, 3, 2, 1)^T$, $(1, 1, 1, 1)$, скалярное произведение стандартное.
22. $(3, 2, -1)^T$, $(2, 0, -1)^T$, $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

23. $(2,3,4,1)^T$, $(1,2,2,1)^T$, скалярное произведение стандартное.

24. $(3,3,-1)^T$, $(1,2,-1)^T$, $(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

25. $(1-i,1+i,i)^T$, $(1,1-i,1)^T$, скалярное произведение стандартное.

26. $(-1,3+i,2i)^T$, $(0,1,i)^T$, скалярное произведение стандартное.

27. $(5,2,-2)^T$, $(2,0,-1)^T$, $(x,y) = 3x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2-x_1y_3-x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

28. $(0,-2,0,2)^T$, $(1,2,2,1)^T$, скалярное произведение стандартное.

29. $(1,-1,-1)^T$, $(1,2,1)^T$, $(x,y) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3$.

30. $(1+i,2,1+3i)^T$, $(2+i,1,1+2i)^T$, скалярное произведение стандартное.

Задача 6. Система векторов задана в ортонормированном базисе евлидова или унитарного пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов:

1. $(1,-1,0,1+i)^T$, $(1,-i,0,-2+i)^T$, $(1+2i,4-i,0,-1)^T$.
2. $(i,0,1,-i)^T$, $(2,0,0,-1)^T$, $(0,0,2,-i)^T$.
3. $(1,-1,1,-1)^T$, $(4,-2,4,-2)^T$, $(-2,7,-3,-2)^T$.
4. $(1,-3,2,1)^T$, $(-1,7,-3,-2)^T$, $(2,-2,3,1)^T$.
5. $(1,0,1,-1)^T$, $(6,0,4,-5)^T$, $(3,2,-5,4)^T$.
6. $(1,2,-1,1)^T$, $(-5,-5,4,-2)^T$, $(-3,6,2,0)^T$.
7. $(1,2,1,1)^T$, $(3,4,1,1)^T$, $(1,-3,-1,1)^T$.
8. $(1+i,0,1,-1)^T$, $(2-i,0,-1,i)^T$, $(-1,0,1+2i,4-i)^T$.
9. $(1,i,0,-i)^T$, $(0,2,0,-1)^T$, $(2,0,0,-i)^T$.

10. $(1,3,1,2)^T$, $(2,4,-3,2)^T$, $(1,1,-1,2)^T$.
11. $(0,2,1+i,1-2i)^T$, $(0,1,i,2-i)^T$, $(0,1+2i,1-i,1)^T$.
12. $(2+i,0,1,-1-i)^T$, $(2,0,0,-1)^T$, $(0,0,2,-i)^T$.
13. $(5,-3,5,-3)^T$, $(4,-2,4,-2)^T$, $(-2,7,-3,-2)^T$.
14. $(0,4,-1,-1)^T$, $(-1,7,-3,-2)^T$, $(2,-2,3,1)^T$.
15. $(7,0,5,-6)^T$, $(6,0,4,-5)^T$, $(3,2,-5,4)^T$.
16. $(4,3,-3,1)^T$, $(-5,-5,4,-2)^T$, $(-3,6,2,0)^T$.
17. $(4,6,2,2)^T$, $(3,4,1,1)^T$, $(1,-3,-1,1)^T$.
18. $(0,3,0,-1+i)^T$, $(0,2-i,-1,i)^T$, $(0,-1,1+2i,4-i)^T$.
19. $(1,2+i,-1-i,0)^T$, $(0,2,-1,0)^T$, $(2,0,-i,0)^T$.
20. $(3,7,-2,4)^T$, $(2,4,-3,2)^T$, $(1,1,-1,2)^T$.
21. $(1+i,0,3-i,i)^T$, $(1,0,i,2+i)^T$, $(1+2i,0,4-i,1)^T$.
22. $(i,3,0,-2i)^T$, $(2,0,0,-1)^T$, $(0,2,0,-i)^T$.
23. $(-1,6,-2,-3)^T$, $(4,-2,4,-2)^T$, $(-2,7,-3,-2)^T$.
24. $(3,-5,5,2)^T$, $(-1,7,-3,-2)^T$, $(2,-2,3,1)^T$.
25. $(4,2,-4,3)^T$, $(6,0,4,-5)^T$, $(3,2,-5,4)^T$.
26. $(-2,8,1,1)^T$, $(-5,-5,4,-2)^T$, $(-3,6,2,0)^T$.
27. $(2,-1,0,2)^T$, $(3,4,1,1)^T$, $(1,-3,-1,1)^T$.
28. $(i,2+2i,0,3-i)^T$, $(2-i,-1,0,i)^T$, $(-1,1+2i,0,4-i)^T$.
29. $(3,0,i,-2i)^T$, $(0,0,2,-1)^T$, $(2,0,0,-i)^T$.
30. $(2,4,0,4)^T$, $(2,4,-3,2)^T$, $(1,1,-1,2)^T$.

Задача 7. Дополнить до ортогональных базисов данные системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением.

1. $(1,1,1,2)^T$, $(1,0,1,-1)^T$;

2. $(1,-1,2,0)^T$, $(-1,1,1,3)^T$;

3. $(1,2,1,2)^T$, $(1,1,-1,-1)^T$;

4. $(1,-1,0,1)^T$, $(1,1,-1,0)^T$;

5. $(1,1,1,1)^T$, $(1,-1,1,-1)^T$;

6. $(0,1,0,1)^T$, $(1,1,2,-1)^T$;

7. $(1,1,1,1)^T$, $(1,-1,-1,1)^T$;

8. $(2,5,4,3)^T$, $(3,4,-5,-2)^T$;

9. $(1,3,5,7)^T$, $(7,-5,3,-1)^T$;

10. $(1,4,7,0)^T$, $(3,1,-1,1)^T$;

11. $(1,1,2,1)^T$, $(1,0,-1,1)^T$;

12. $(1,-1,0,2)^T$, $(-1,1,3,1)^T$;

13. $(1,2,2,1)^T$, $(1,1,-1,-1)^T$;

14. $(1,-1,1,0)^T$, $(1,1,0,-1)^T$;

15. $(1,1,1,1)^T$, $(1,-1,-1,1)^T$;

16. $(0,1,1,0)^T$, $(1,1,-1,2)^T$;

17. $(1,1,1,1)^T$, $(1,-1,1,-1)^T$;

18. $(2,5,3,4)^T$, $(3,4,-2,-5)^T$;

19. $(1,3,7,5)^T$, $(7,-5,-1,3)^T$;

20. $(1,4,0,7)^T$, $(3,1,1,-1)^T$;

21. $(1,1,1,2)^T$, $(0,1,1,-1)^T$;

22. $(-1,1,2,0)^T$, $(1,-1,1,3)^T$;

23. $(2,1,1,2)^T$, $(1,1,-1,-1)^T$;

24. $(-1,1,0,1)^T$, $(1,1,-1,0)^T$;

25. $(1,1,1,1)^T$, $(-1,1,1,-1)^T$;

26. $(1,0,0,1)^T$, $(1,1,2,-1)^T$;

27. $(1,1,1,1)^T$, $(-1,1,-1,1)^T$;

28. $(5,2,4,3)^T$, $(4,3,-5,-2)^T$;

29. $(3,1,5,7)^T$, $(-5,7,3,-1)^T$;

30. $(4,1,7,0)^T$, $(1,3,-1,1)^T$;

Задача 8. Подпространство L евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе системой линейных уравнений $Ax = 0$.

1) Найти какой-либо ортонормированный базис в L.

2) Найти ортогональное дополнение подпространства L и указать какой-либо базис в $L^{\perp}$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & 11 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 7 & 11 & -1 \\ 24 & -2 & 14 & 22 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & -6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 7 & -14 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -10 & 1 & 5 & -13 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & -2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & -12 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Подпространство L евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами a_1, a_2. Найти ортогональную проекцию y на L и ортогональную составляющую z относительно L вектора x, заданного в том же базисе координатным столбцом ξ:

1. $a_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $a_2 = (2, -1, 0, 1)^T$, $\xi = (4, -1, 1, 2)^T$.
2. $a_1 = (1, -1, 1, 1)^T$, $a_2 = (1, 4, -1, 0)^T$, $\xi = (3, 2, 1, 1)^T$.
3. $a_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $a_2 = (3, 3, -2, 1)^T$, $\xi = (3, 4, -2, 4)^T$.
4. $a_1 = (3, 3, -2, 1)^T$, $a_2 = (-1, 6, 3, -5)^T$, $\xi = (2, 8, 2, -6)^T$.

5. $a_1 = (2, 0, -1, -1)^T$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\xi = (4, 0, 2, -1)^T$.
6. $a_1 = (1, -1, 1, -1)^T$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\xi = (3, -2, 1, -1)^T$.
7. $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = (5, 1, 1, 3)^T$, $\xi = (7, 1, 2, 5)^T$.
8. $a_1 = (5, 1, 1, 3)^T$, $a_2 = (3, -1, 1, 0)^T$, $\xi = (7, 3, 3, 5)^T$.
9. $a_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $a_2 = (3, 3, -2, 1)^T$, $\xi = (5, 4, -2, 0)^T$.
10. $a_1 = (2, 0, -1, -1)^T$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\xi = (4, 0, 1, -1)^T$.
11. $a_1 = (3, -2, 1, 1)^T$, $a_2 = (2, -1, 0, 1)^T$, $\xi = (6, -2, 1, 1)^T$.
12. $a_1 = (2, 3, 0, 1)^T$, $a_2 = (1, 4, -1, 0)^T$, $\xi = (4, 6, -1, 5)^T$.
13. $a_1 = (4, 3, -3, 2)^T$, $a_2 = (3, 3, -2, 1)^T$, $\xi = (5, 7, -6, 4)^T$.
14. $a_1 = (2, 9, 1, -4)^T$, $a_2 = (-1, 6, 3, -5)^T$, $\xi = (6, 15, 5, -8)^T$.
15. $a_1 = (3, -1, 0, -2)^T$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\xi = (3, -2, 2, -4)^T$.
16. $a_1 = (3, 1, -1, -3)^T$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\xi = (5, 3, -1, -3)^T$.
17. $a_1 = (3, 1, 1, 2)^T$, $a_2 = (5, 1, 1, 3)^T$, $\xi = (7, 6, 3, 5)^T$.
18. $a_1 = (8, 0, 2, 3)^T$, $a_2 = (3, -1, 1, 0)^T$, $\xi = (10, 0, 5, 5)^T$.
19. $a_1 = (4, 3, -3, 2)^T$, $a_2 = (3, 3, -2, 1)^T$, $\xi = (7, 7, -5, 1)^T$.
20. $a_1 = (3, -1, -2, -2)^T$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\xi = (3, -2, -2, -4)^T$.
21. $a_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $a_2 = (3, -2, 1, 1)^T$, $\xi = (3, -3, 3, 3)^T$.
22. $a_1 = (1, -1, 1, 1)^T$, $a_2 = (2, 3, 0, 1)^T$, $\xi = (2, 2, 2, 3)^T$.
23. $a_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $a_2 = (4, 3, -3, 2)^T$, $\xi = (5, 4, -4, 2)^T$.
24. $a_1 = (3, 3, -2, 1)^T$, $a_2 = (2, 9, 1, -4)^T$, $\xi = (8, 10, -4, -5)^T$.
25. $a_1 = (2, 0, -1, -1)^T$, $a_2 = (3, -1, 0, -2)^T$, $\xi = (5, 1, 0, -4)^T$.
26. $a_1 = (1, -1, 1, -1)^T$, $a_2 = (2, 0, 0, -2)^T$, $\xi = (4, 1, 3, -2)^T$.
27. $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = (7, 3, 3, 5)^T$, $\xi = (7, 5, 5, 6)^T$.

28. $a_1 = (5, 1, 1, 3)^T$, $a_2 = (2, 2, 0, 3)^T$, $\xi = (6, 4, 2, 7)^T$.

29. $a_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $a_2 = (2, 3, -1, 0)^T$, $\xi = (4, 2, -1, 3)^T$.

30. $a_1 = (2, 0, -1, -1)^T$, $a_2 = (1, 1, -2, 0)^T$, $\xi = (2, 3, -4, 1)^T$.

Литература

[1] *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987. — 496 с.

[2] *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М.: Высш. шк., 1983. — с.

[3] *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — 2-е изд., доп. — М.: Высш. шк., 1994. — 206 с.

[4] *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.

[5] *Окунев Л.Я.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Просвещение, 1964. — 184 с.

[6] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1978. — 384 с.

[7] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999. — 384 с.

[8] *Сборник залач по алгебре* /Под ред. Кострикина А.И. — М.: Факториал, 1995. — 454 с.

[9] *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1968. — 304 с.

[10] *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты).— 2-е изд., перераб. — М.: Высш. школа, 1999. — 126 с.

Список типовых расчетов

Аналитическая геометрия

1. Векторная алгебра
2. Линии второго порядка

Линейная алгебра

1. Системы линейных уравнений
2. Линейные пространства
3. Евклидовы пространства
4. Линейные операторы
5. Билинейные и квадратичные формы

Общая алгебра

1. Комплексные числа
2. Алгебраические структуры

Учебное издание

Александр Аркадьевич Айзикович
Татьяна Сергеевна Быкова

Сборник типовых расчетов
по алгебре и аналитической геометрии
(евклидовы пространства)

В авторской редакции

Компьютерная верстка *А.А.Айзикович, Т.С.Быкова*
Корректор *И.О.Фамилия*

Оригинал-макет подготовлен с помощью издательской системы
LaTeX 2$_\varepsilon$ (MiKTeX) на оборудовании кафедры ПМИ ИжГТУ

Издательство ИжГТУ. Лицензия ЛР №020885 от 24.05.99.
Подписано в печать 00.00.2002. Бумага офсетная. Формат 60x84/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 00,00. Уч.-изд.л. 00,00.
Тираж 100 экз. Заказ №000.

Типография Издательства ИжГТУ.
Лицензия РФ ПД №00525 от 28.04.2000.
426069, г.Ижевск, ул.Студенческая,7.