Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет»
Кафедра прикладной математики и информатики

А.А.Айзикович
Т.С.Быкова

СБОРНИК ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ
по алгебре и геометрии
(линейные пространства)

Ижевск 2004

УДК 514.12 (075.8)
А 37

Рецензент: А.Л. Тептин, канд. физ.-мат. наук, профессор

А37 **Айзикович А.А., Быкова Т.С.** Сборник типовых расчетов по алгебре и геометрии (линейные пространства).
— Ижевск:
Изд-во ИжГТУ, 2004. — 33 с.

Сборник содержит типовые задания по основным разделам дисциплин «Алгебра и аналитическая геометрия» и «Дифференциальная геометрия». В их полном объеме типовые расчеты предназначены для студентов первого и второго курсов, обучающихся по специальности 0730 — прикладная математика. Отдельные части расчетов будут также полезны студентам любых инженерно-технических специальностей.

Типовые расчеты могут быть использованы преподавателями математики как для организации самостоятельной работы студентов, так и для проведения контрольных мероприятий (контрольных и самостоятельных работ, коллоквиумов, зачетов, экзаменов, проверки остаточных знаний и т.п.) по аналитической геометрии, линейной алгебре, общей алгебре и дифференциальной геометрии.

Настоящий выпуск содержит задачи по

Оглавление

Типовой расчет «Линейные пространства» **4**
Теоретические упражнения 4
Расчетные задания 5

Рекомендуемая литература **16**

Использованная литература **17**

Список типовых расчетов **19**

Типовой расчет «Линейные пространства»

Теоретические упражнения

1. Доказать, что пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства симметрических матриц и подпространства кососимметрических матриц того же порядка.

2. Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

3. Доказать, что n-мерное линейное пространство является прямой суммой подпространства векторов, все координаты которых равны между собой, и подпространства векторов, сумма координат которых равна нулю.

4. Пусть C — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций. Покажите, что $C = U \oplus V$, где:

а) U - подпространство функций, обращающихся в нуль в точке 0, V - подпространство констант;

б) U - подпространство функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,1]$, V - подпространство линейных функций.

5. Найдите разложение функции e^x в виде $e^x = f(x) + g(x)$, где $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ для обоих разложений пространства C, указанных в предыдущем упражнении.

6. Покажите, что если система векторов a, b линейно независима, то $L(a,b) = L(a) \oplus L(b)$.

7. Покажите, что если $a_1, \ldots, a_n$ — базис линейного пространства V, то $V = L(a_1) \oplus \ldots \oplus L(a_n)$.

8. Пусть $a_1 \in U_1, \ldots, a_n \in U_n$ — ненулевые векторы линейных подпространств линейного пространства V. Покажите, что если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, то система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима.

9. Доказать, что сумма W двух линейных подпространств U и V тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотябы один вектор $w \in W$ однозначно представдяется в виде $w = u + v$, где $u \in U$, $v \in V$.

10. Пусть U и V — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

а) если сумма размерностей U и V больше размерности всего пространства, то пересечение $U \bigcap V$ содержит ненулевой вектор;

б) если размерность суммы U и V на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

Расчетные задания

Задача 1. Образует ли линейное прстранство данное множество, в котором заданы сумма двух любых элементов a и b и произведение любого элемента a на любое действительное число α ?

1. Множество векторов трехмерного пространства с целыми координатами;

   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

2. Множество векторов, лежащих на одной оси;

   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

3. Множество векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из кординатных осей;

   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

4. Множество векторов трехмерного пространства с рациональными координатами;

   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

5. Множество векторов, лежащих на одной оси;

   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot |a|$.

6. Множество векторов, являющихся линейными комбинациями векторов x, y, z;

   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

7. Множество функций, принимающих положительные значения;

   сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $f^{\alpha}(t)$.

8. Множество непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций;

   сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

9. Множество дифференцируемых функций;

   сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

10. Множество дифференцируемых функций;

    сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

11. Множество четных функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$;

    сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

12. Множество четных функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$;

    сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

13. Множество нечетных функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$;

    сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

14. Множество упорядоченных наборов из n чисел $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$;

    сумма: $a + b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,

    произведение: $\alpha a = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

15. Множество упорядоченных наборов из n чисел $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$;

    сумма: $a + b = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$,

    произведение: $\alpha a = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

16. Множество всех сходящихся числовых последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$;

    сумма: $a + b = \{u_n + v_n\}$, произведение: $\alpha a = \{\alpha u_n\}$.

17. Множество всех ограниченных числовых последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$;

    сумма: $a + b = \{u_n + v_n\}$, произведение: $\alpha a = \{\alpha u_n\}$.

18. Множество всех монотонно возрастающих числовых последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$;

    сумма: $a + b = \{u_n + v_n\}$, произведение: $\alpha a = \{\alpha u_n\}$.

19. Множество всех монотонно убывающих числовых последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$;

    сумма: $a + b = \{u_n + v_n\}$, произведение: $\alpha a = \{\alpha u_n\}$.

20. Множество всех монотонных числовых последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$;

    сумма: $a + b = \{u_n + v_n\}$, произведение: $\alpha a = \{\alpha u_n\}$.

21. Множество знакопостоянных функций;

    сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

22. Множество монотонных функций;

    сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

23. Множество многочленов третьей степени от переменной x;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

24. Множество многочленов степени меньшей или равной трем от переменной x;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

25. Множество многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

26. Множество многочленов от одной переменной степени n;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

27. Множество целых чисел;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

28. Множество действительных чисел;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

29. Множество положительных действительных чисел;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

30. Множество отрицательных действительных чисел;

    сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

Задача 2. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы векторов.

1. $(-5; 10; 1; -4)$, $(2; 2; 5; 2)$, $(-3; 11; 4; -2)$, $(0; -1; -2; 0)$.
2. $(-5; 6; 3; -4)$, $(5; 0; 1; 5)$, $(5; 6; 5; 6)$, $(5; 12; 9; 7)$.
3. $(4; 1; 1; 5)$, $(5; -1; 3; 5)$, $(3; 2; 1; 4)$, $(4; 0; 3; 4)$.
4. $(3; 1; -2; 2)$, $(2; 5; 4; 2)$, $(5; 6; 2; 4)$, $(8; 7; 0; 6)$.
5. $(-1; 6; 2; 0)$, $(4; -2; 1; 4)$, $(-3; 7; 1; -2)$, $(2; -1; 0; 2)$.
6. $(5; -4; -4; 4)$, $(3; -1; -2; 3)$, $(8; -5; -6; 7)$, $(13; -9; -10; 11)$.
7. $(5; 4; 8; 4)$, $(4; 4; 9; 4)$, $(9; 3; 11; 8)$, $(8; 3; 12; 8)$.
8. $(2; -5; -5; 1)$, $(3; -4; -5; 3)$, $(-5; 9; 10; -4)$, $(-7; 14; 15; -5)$.
9. $(2; 5; 3; 1)$, $(2; -2; -1; 2)$, $(1; 4; 1; 0)$, $(3; -1; 1; 3)$.
10. $(6; 7; 2; 5)$, $(2; -2; -3; 2)$, $(8; 5; -1; 7)$, $(14; 12; 1; 12)$.
11. $(1; -2; 3; 0)$, $(0; 5; 4; 0)$, $(0; 3; -1; 1)$, $(1; 6; 6; 1)$.
12. $(-1; 7; 2; -2)$, $(2; -4; -5; 2)$, $(1; 3; -3; 0)$, $(0; 10; -1; -2)$.
13. $(-2; 6; 0; -3)$, $(5; -3; 1; 5)$, $(5; -5; 4; 6)$, $(8; -2; 5; 8)$.
14. $(3; 5; 4; 2)$, $(4; 1; 2; 4)$, $(-1; 4; 2; -2)$, $(2; 9; 6; 0)$.
15. $(-3; 2; 0; -4)$, $(0; -1; -2; 0)$, $(8; -1; 6; 9)$, $(5; 0; 4; 5)$.
16. $(2; 8; 4; 3)$, $(1; -3; -4; 1)$, $(1; 11; 8; 2)$, $(3; 19; 12; 5)$.
17. $(2; -6; -3; 1)$, $(3; 4; 6; 3)$, $(-7; 7; -1; -6)$, $(-2; 5; 2; -2)$.
18. $(3; 10; 5; 4)$, $(3; 4; 3; 3)$, $(0; 6; 2; 1)$, $(3; 16; 7; 5)$.
19. $(4; 0; 2; 3)$, $(2; -1; 2; 2)$, $(0; 1; 3; 1)$, $(2; 2; 3; 2)$.
20. $(3; 1; 4; 4)$, $(5; 4; 5; 5)$, $(8; 5; 9; 9)$, $(11; 6; 13; 13)$.
21. $(2; -1; -2; 1)$, $(1; 2; 4; 1)$, $(2; 2; 7; 3)$, $(3; -1; 1; 3)$.
22. $(3; -4; -2; 2)$, $(4; 3; 2; 4)$, $(7; -1; 0; 6)$, $(10; -5; -2; 8)$.
23. $(4; -2; 1; 3)$, $(1; 4; 4; 1)$, $(-2; 3; 2; -1)$, $(3; 5; 7; 3)$.
24. $(2; -1; 0; 1)$, $(2; 5; 4; 2)$, $(4; 4; 4; 3)$, $(6; 3; 4; 4)$.
25. $(3; 1; 5; 4)$, $(1; -4; -4; 1)$, $(5; 2; 8; 6)$, $(3; -3; -1; 3)$.
26. $(5; 0; 5; 4)$, $(5; 3; 2; 5)$, $(10; 3; 7; 9)$, $(15; 3; 12; 13)$.
27. $(1; 5; 3; 0)$, $(4; -3; 2; 4)$, $(4; 4; 5; 3)$, $(7; -4; 4; 7)$.
28. $(3; -4; 1; 4)$, $(-2; 6; 5; -2)$, $(-5; 10; 4; -6)$, $(-8; 14; 3; -10)$.
29. $(2; 0; 5; 1)$, $(4; -3; 2; 4)$, $(0; 1; -2; 1)$, $(-2; 4; 1; -2)$.
30. $(5; -7; -2; 4)$, $(-2; 1; 0; -2)$, $(3; -6; -2; 2)$, $(8; -13; -4; 6)$.

Задача 3. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы векторов.

1.	$(5;-2;3;8)$,	$(10;2;12;22)$,	$(5;3;8;13)$,	$(1;5;6;7)$.
2.	$(3;1;4;7)$,	$(1;0;1;2)$,	$(2;1;3;5)$,	$(6;2;8;14)$.
3.	$(4;5;9;13)$,	$(-5;5;0;-5)$,	$(0;4;4;4)$,	$(5;1;6;11)$.
4.	$(0;2;2;2)$,	$(3;4;7;10)$,	$(5;3;8;13)$,	$(4;1;5;9)$.
5.	$(3;-4;-1;2)$,	$(6;-1;5;11)$,	$(4;-2;2;6)$,	$(6;-6;0;6)$.
6.	$(2;2;4;6)$,	$(-2;5;3;1)$,	$(0;4;4;4)$,	$(3;-2;1;4)$.
7.	$(5;3;8;13)$,	$(4;1;5;9)$,	$(4;2;6;10)$,	$(0;1;1;1)$.
8.	$(5;-5;0;5)$,	$(5;5;10;15)$,	$(0;4;4;4)$,	$(4;-1;3;7)$.
9.	$(1;1;2;3)$,	$(8;4;12;20)$,	$(4;5;9;13)$,	$(4;4;8;12)$.
10.	$(3;2;5;8)$,	$(-2;4;2;0)$,	$(3;3;6;9)$,	$(5;5;10;15)$.
11.	$(3;5;8;11)$,	$(-2;2;0;-2)$,	$(3;-1;2;5)$,	$(-1;6;5;4)$.
12.	$(2;2;4;6)$,	$(7;3;10;17)$,	$(5;2;7;12)$,	$(2;0;2;4)$.
13.	$(1;0;1;2)$,	$(-2;5;3;1)$,	$(3;4;7;10)$,	$(3;4;7;10)$.
14.	$(3;-5;-2;1)$,	$(6;-1;5;11)$,	$(5;-2;3;8)$,	$(7;-7;0;7)$.
15.	$(4;-3;1;5)$,	$(7;4;11;18)$,	$(5;3;8;13)$,	$(8;0;8;16)$.
16.	$(4;4;8;12)$,	$(1;2;3;4)$,	$(5;1;6;11)$,	$(8;5;13;21)$.
17.	$(3;2;5;8)$,	$(0;2;2;2)$,	$(2;-1;1;3)$,	$(6;1;7;13)$.
18.	$(-1;5;4;3)$,	$(0;1;1;1)$,	$(4;0;4;8)$,	$(6;-5;1;7)$.
19.	$(2;-1;1;3)$,	$(8;3;11;19)$,	$(4;4;8;12)$,	$(7;3;10;17)$.
20.	$(-3;3;0;-3)$,	$(-2;2;0;-2)$,	$(2;-1;1;3)$,	$(6;-4;2;8)$.
21.	$(4;4;8;12)$,	$(2;4;6;8)$,	$(5;5;10;15)$,	$(10;9;19;29)$.
22.	$(0;1;1;1)$,	$(6;2;8;14)$,	$(3;1;4;7)$,	$(2;0;2;4)$.
23.	$(-1;3;2;1)$,	$(3;5;8;11)$,	$(0;4;4;4)$,	$(-2;7;5;3)$.
24.	$(4;3;7;11)$,	$(8;4;12;20)$,	$(4;5;9;13)$,	$(9;8;17;26)$.
25.	$(2;-1;1;3)$,	$(1;2;3;4)$,	$(3;3;6;9)$,	$(2;4;6;8)$.
26.	$(-1;2;1;0)$,	$(2;3;5;7)$,	$(-2;2;0;-2)$,	$(-4;4;0;-4)$.
27.	$(1;3;4;5)$,	$(2;-1;1;3)$,	$(2;2;4;6)$,	$(2;-1;1;3)$.
28.	$(3;0;3;6)$,	$(4;0;4;8)$,	$(1;-1;0;1)$,	$(3;-1;2;5)$.
29.	$(3;0;3;6)$,	$(5;-3;2;7)$,	$(4;-4;0;4)$,	$(6;-4;2;8)$.
30.	$(4;-2;2;6)$,	$(5;-2;3;8)$,	$(4;-1;3;7)$,	$(9;-3;6;15)$.

Задача 4. Найти размерность и базис линейного пространства, заданного в некотором базисе системой уравнений $Ax = 0$:

1. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 7 & -14 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -10 & 1 & 5 & -13 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & -2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & -12 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 & 5 \\ 7 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & 10 & -9 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & 11 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 7 & 11 & -1 \\ 24 & -2 & 14 & 22 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & -6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Доказать, что четырехмерное арифметическое пространство является прямой суммой линейных подпространств U и V, натянутых на системы векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, и найти проекцию вектора x из этого пространства на линейное подпространство U параллельно линейному подпространству V:

1. $a_1 = (-4; 6; 7; 1)$, $a_2 = (-8; 2; 3; -2)$, $a_3 = (12; 2; 1; 5)$,
$b_1 = (-5; 4; 5; -1)$, $b_2 = (-13; 7; 9; -2)$, $b_3 = (2; -5; -6; 1)$,
$x = (-7; 4; 5; 0)$.
2. $a_1 = (3; 1; 0; 3)$, $a_2 = (5; 6; 5; 7)$, $a_3 = (7; 11; 10; 11)$,
$b_1 = (4; 1; 0; 3)$, $b_2 = (9; 6; 4; 9)$, $b_3 = (3; -3; -4; 0)$,
$x = (11; 11; 9; 13)$.
3. $a_1 = (-5; 6; 5; 11)$, $a_2 = (2; 0; 1; -4)$, $a_3 = (-1; 6; 7; 3)$,

$b_1 = (-4; 5; 4; 10)$, $b_2 = (-6; 4; 2; 13)$, $b_3 = (-6; 11; 10; 17)$,
$x = (-7; 11; 10; 17)$.
4. $a_1 = (-1; 0; 1; 3)$, $a_2 = (2; 4; 5; 8)$, $a_3 = (5; 8; 9; 13)$,
$b_1 = (-2; 2; 3; 5)$, $b_2 = (0; 7; 9; 14)$, $b_3 = (6; 1; 0; -1)$,
$x = (0; 3; 2; 0)$.
5. $a_1 = (1; 2; 1; 6)$, $a_2 = (-5; 4; 5; 1)$, $a_3 = (-9; 10; 11; 8)$,
$b_1 = (2; 0; -1; 4)$, $b_2 = (-7; 5; 7; -2)$, $b_3 = (-1; 5; 4; 10)$,
$x = (-9; 6; 8; 0)$.
6. $a_1 = (-3; 9; 10; 9)$, $a_2 = (-6; 7; 8; 8)$, $a_3 = (-9; 5; 6; 7)$,
$b_1 = (-4; 4; 5; 4)$, $b_2 = (-10; 12; 14; 13)$, $b_3 = (2; 0; -1; 1)$,
$x = (-5; 12; 13; 13)$.
7. $a_1 = (5; 0; 1; 0)$, $a_2 = (-1; 0; 1; 1)$, $a_3 = (7; 0; -1; -2)$,
$b_1 = (4; 4; 5; 4)$, $b_2 = (3; 5; 7; 6)$, $b_3 = (9; 7; 8; 6)$,
$x = (-3; 5; 7; 7)$.
8. $a_1 = (-4; 3; 4; 3)$, $a_2 = (-10; 4; 5; 5)$, $a_3 = (-16; 5; 6; 7)$,
$b_1 = (-5; 1; 2; 1)$, $b_2 = (-15; 6; 8; 7)$, $b_3 = (0; 3; 2; 4)$,
$x = (-1; 0; -1; 1)$.
9. $a_1 = (3; 2; 3; 5)$, $a_2 = (-1; 3; 4; 7)$, $a_3 = (-5; 4; 5; 9)$,
$b_1 = (2; 1; 2; 4)$, $b_2 = (1; 5; 7; 12)$, $b_3 = (-5; 2; 1; 0)$,
$x = (4; 2; 3; 5)$.
10. $a_1 = (3; 3; 4; 8)$, $a_2 = (-1; 7; 8; 13)$, $a_3 = (-5; 11; 12; 18)$,
$b_1 = (2; 5; 6; 10)$, $b_2 = (1; 13; 15; 24)$, $b_3 = (5; 2; 3; 6)$,
$x = (-1; 12; 14; 24)$.
11. $a_1 = (4; 1; 2; -4)$, $a_2 = (7; 0; 1; -4)$, $a_3 = (-10; 1; 0; 4)$,
$b_1 = (3; 0; 1; -5)$, $b_2 = (10; 1; 3; -8)$, $b_3 = (1; 1; 0; 7)$,
$x = (8; 1; 2; -3)$.
12. $a_1 = (3; 3; 4; 8)$, $a_2 = (-3; 0; 1; 6)$, $a_3 = (9; 3; 2; -4)$,
$b_1 = (2; -2; -1; 3)$, $b_2 = (-1; -1; 1; 10)$, $b_3 = (-7; 5; 4; 1)$,
$x = (7; 4; 2; -8)$.
13. $a_1 = (4; 0; 1; 3)$, $a_2 = (-1; 2; 3; 6)$, $a_3 = (-6; 4; 5; 9)$,
$b_1 = (3; -3; -2; 0)$, $b_2 = (2; 0; 2; 7)$, $b_3 = (-7; 9; 8; 7)$,
$x = (-8; 5; 4; 3)$.
14. $a_1 = (5; 3; 4; 4)$, $a_2 = (2; -2; -1; 0)$, $a_3 = (1; 7; 6; 4)$,

$b_1 = (4; 2; 3; 3)$, $b_2 = (6; 1; 3; 4)$, $b_3 = (6; 5; 6; 5)$,
$x = (6; 3; 4; 4)$.

15. $a_1 = (5; 1; 2; -1)$, $a_2 = (-2; 4; 3; 5)$, $a_3 = (1; 9; 8; 9)$,
$b_1 = (-4; 4; 3; 6)$, $b_2 = (-6; 7; 5; 10)$, $b_3 = (-6; 5; 4; 8)$,
$x = (-5; 3; 1; 5)$.

16. $a_1 = (3; 3; 2; 7)$, $a_2 = (8; 2; 1; 5)$, $a_3 = (13; 1; 0; 3)$,
$b_1 = (4; 3; 2; 7)$, $b_2 = (12; 4; 2; 11)$, $b_3 = (0; 5; 4; 10)$,
$x = (7; 2; 1; 5)$.

17. $a_1 = (3; 4; 3; 6)$, $a_2 = (-1; 4; 5; 3)$, $a_3 = (1; 12; 13; 12)$,
$b_1 = (-4; 1; 2; -1)$, $b_2 = (-5; 6; 8; 3)$, $b_3 = (7; 3; 2; 6)$,
$x = (-3; 14; 16; 12)$.

18. $a_1 = (4; 5; 4; 10)$, $a_2 = (2; 1; 0; 5)$, $a_3 = (0; -3; -4; 0)$,
$b_1 = (5; 4; 3; 9)$, $b_2 = (7; 4; 2; 13)$, $b_3 = (8; 8; 7; 14)$,
$x = (7; 8; 7; 14)$.

19. $a_1 = (0; 7; 8; 8)$, $a_2 = (-1; 1; 2; 3)$, $a_3 = (2; 5; 4; 2)$,
$b_1 = (-1; 3; 4; 4)$, $b_2 = (-2; 5; 7; 8)$, $b_3 = (-1; 4; 5; 4)$,
$x = (1; 10; 11; 11)$.

20. $a_1 = (3; 7; 6; 4)$, $a_2 = (9; 9; 8; 5)$, $a_3 = (15; 11; 10; 6)$,
$b_1 = (4; 4; 3; 1)$, $b_2 = (13; 12; 10; 5)$, $b_3 = (1; 0; 1; 2)$,
$x = (17; 21; 19; 13)$.

21. $a_1 = (-2; 5; 6; 7)$, $a_2 = (-6; 0; 1; 3)$, $a_3 = (10; 5; 4; 1)$,
$b_1 = (-3; 1; 2; 3)$, $b_2 = (-9; 2; 4; 7)$, $b_3 = (0; 1; 2; 2)$,
$x = (-5; 4; 5; 7)$.

22. $a_1 = (-1; 0; 1; -2)$, $a_2 = (0; 6; 7; 5)$, $a_3 = (1; 12; 13; 12)$,
$b_1 = (-2; 2; 3; 0)$, $b_2 = (-2; 9; 11; 6)$, $b_3 = (4; 3; 2; 6)$,
$x = (-1; 15; 17; 13)$.

23. $a_1 = (-1; 5; 6; 5)$, $a_2 = (1; 4; 5; 5)$, $a_3 = (3; 3; 4; 5)$,
$b_1 = (-2; 3; 4; 3)$, $b_2 = (-1; 8; 10; 9)$, $b_3 = (5; -1; -2; 0)$,
$x = (-4; 4; 5; 3)$.

24. $a_1 = (-1; 3; 2; 4)$, $a_2 = (4; 3; 4; 3)$, $a_3 = (7; 9; 10; 10)$,
$b_1 = (0; 1; 2; 0)$, $b_2 = (4; 5; 7; 4)$, $b_3 = (4; 2; 1; 4)$,
$x = (-2; 8; 7; 9)$.

25. $a_1 = (0; 2; 1; 2)$, $a_2 = (6; 3; 2; 2)$, $a_3 = (12; 4; 3; 2)$,

$b_1 = (1; 4; 3; 4)$, $b_2 = (7; 6; 4; 5)$, $b_3 = (-4; 6; 5; 7)$,
$x = (11; 4; 2; 2)$.

26. $a_1 = (6; 2; 3; -3)$, $a_2 = (7; 9; 10; 5)$, $a_3 = (8; 16; 17; 13)$,
$b_1 = (5; 4; 5; -1)$, $b_2 = (12; 14; 16; 5)$, $b_3 = (-3; 2; 1; 8)$,
$x = (8; 7; 8; 3)$.

27. $a_1 = (-4; 3; 2; 1)$, $a_2 = (-5; 4; 3; 1)$, $a_3 = (-6; 5; 4; 1)$,
$b_1 = (3; 0; 1; 2)$, $b_2 = (8; -3; -1; 2)$, $b_3 = (1; 3; 4; 4)$,
$x = (-9; 4; 2; -2)$.

28. $a_1 = (0; 9; 8; 4)$, $a_2 = (4; -6; -5; 0)$, $a_3 = (-8; 3; 2; -4)$,
$b_1 = (1; 4; 3; -1)$, $b_2 = (3; -9; -7; 2)$, $b_3 = (6; 3; 2; -1)$,
$x = (5; 7; 6; 3)$.

29. $a_1 = (5; 3; 4; -1)$, $a_2 = (-6; 3; 2; 6)$, $a_3 = (-7; 9; 8; 11)$,
$b_1 = (4; 1; 2; -3)$, $b_2 = (10; -1; 1; -8)$, $b_3 = (2; 4; 5; -1)$,
$x = (6; 4; 5; 0)$.

30. $a_1 = (-1; 3; 4; -2)$, $a_2 = (-2; 2; 3; -2)$, $a_3 = (3; -1; -2; 2)$,
$b_1 = (-2; 4; 5; -1)$, $b_2 = (-4; 7; 9; -2)$, $b_3 = (2; -5; -6; 1)$,
$x = (-3; 3; 5; -5)$.

Задача 6. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств четырехмерного арифметического пространства, натянутых на системы вектров a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3:

1. $a_1 = (4; 8; 5; 13)$, $a_2 = (6; 2; 4; 7)$, $a_3 = (10; 10; 9; 20)$,
$b_1 = (7; 3; 5; 9)$, $b_2 = (-1; 2; 1; 2)$, $b_3 = (16; 12; 13; 27)$.

2. $a_1 = (3; 5; 4; 9)$, $a_2 = (1; 6; 1; 6)$, $a_3 = (3; -3; 3; 1)$,
$b_1 = (0; 5; 0; 4)$, $b_2 = (3; 7; 3; 9)$, $b_3 = (6; 9; 6; 14)$.

3. $a_1 = (5; 2; 4; 6)$, $a_2 = (6; 0; 5; 4)$, $a_3 = (17; 9; 16; 24)$,
$b_1 = (5; -1; 4; 2)$, $b_2 = (11; 4; 10; 13)$, $b_3 = (17; 2; 14; 14)$.

4. $a_1 = (1; -2; 2; 0)$, $a_2 = (0; 4; 2; 7)$, $a_3 = (2; 0; 6; 7)$,
$b_1 = (1; 5; 3; 9)$, $b_2 = (3; 8; 5; 14)$, $b_3 = (5; 11; 7; 19)$.

5. $a_1 = (1; 5; 2; 7)$, $a_2 = (-2; 4; 0; 5)$, $a_3 = (-1; 9; 2; 12)$,
$b_1 = (-1; 5; 1; 7)$, $b_2 = (6; -1; 4; 2)$, $b_3 = (-3; 13; 2; 17)$.

6. $a_1 = (3; 6; 4; 10)$, $a_2 = (9; 7; 4; 12)$, $a_3 = (11; 8; 6; 15)$,

$b_1 = (10; 8; 5; 14)$, $b_2 = (9; 8; 4; 13)$, $b_3 = (8; 8; 3; 12)$.

7. $a_1 = (5; -1; 4; 3)$, $a_2 = (0; 0; 4; 5)$, $a_3 = (-1; 1; 3; 5)$,
$b_1 = (1; 1; 5; 7)$, $b_2 = (0; 1; 4; 6)$, $b_3 = (-5; 1; 4; 7)$.
8. $a_1 = (4; 10; 5; 15)$, $a_2 = (3; 4; 1; 6)$, $a_3 = (11; 24; 11; 36)$,
$b_1 = (4; 5; 2; 8)$, $b_2 = (3; 5; 1; 7)$, $b_3 = (2; 5; 0; 6)$.
9. $a_1 = (3; -1; 2; 1)$, $a_2 = (2; 3; 1; 5)$, $a_3 = (2; -8; 2; -8)$,
$b_1 = (3; 4; 2; 7)$, $b_2 = (5; 7; 4; 12)$, $b_3 = (1; 7; 0; 9)$.
10. $a_1 = (3; -1; 2; 1)$, $a_2 = (3; 7; 5; 13)$, $a_3 = (0; 3; 2; 6)$,
$b_1 = (4; 8; 6; 15)$, $b_2 = (8; 13; 10; 24)$, $b_3 = (12; 18; 14; 33)$.
11. $a_1 = (4; 7; 3; 10)$, $a_2 = (1; 0; 0; 1)$, $a_3 = (10; 9; 11; 19)$,
$b_1 = (2; 1; 1; 3)$, $b_2 = (4; 4; 5; 8)$, $b_3 = (2; 7; 3; 8)$.
12. $a_1 = (3; -3; 2; -1)$, $a_2 = (3; 0; -2; -1)$, $a_3 = (-3; 6; -6; 1)$,
$b_1 = (4; 1; -1; 1)$, $b_2 = (8; 6; 3; 10)$, $b_3 = (12; 11; 7; 19)$.
13. $a_1 = (4; -1; 3; 2)$, $a_2 = (0; 2; -3; 0)$, $a_3 = (8; -6; 12; 4)$,
$b_1 = (1; 3; -2; 2)$, $b_2 = (3; 6; 0; 7)$, $b_3 = (4; -5; 9; 2)$.
14. $a_1 = (5; 2; 4; 6)$, $a_2 = (3; -2; 2; 1)$, $a_3 = (4; -2; 3; 2)$,
$b_1 = (4; -1; 3; 3)$, $b_2 = (4; 0; 3; 4)$, $b_3 = (4; 1; 3; 5)$.
15. $a_1 = (5; 2; 4; 6)$, $a_2 = (-1; 4; 4; 7)$, $a_3 = (4; 7; 9; 15)$,
$b_1 = (-2; 3; 3; 5)$, $b_2 = (1; 5; 6; 10)$, $b_3 = (3; 10; 12; 20)$.
16. $a_1 = (3; 8; 4; 12)$, $a_2 = (3; 2; 3; 4)$, $a_3 = (3; 14; 5; 20)$,
$b_1 = (2; 1; 2; 2)$, $b_2 = (7; 5; 7; 11)$, $b_3 = (12; 9; 12; 20)$.
17. $a_1 = (3; 1; 4; 5)$, $a_2 = (-4; 4; 1; 6)$, $a_3 = (-2; 10; 10; 22)$,
$b_1 = (-3; 5; 2; 8)$, $b_2 = (-6; 3; -1; 3)$, $b_3 = (-5; 9; 6; 17)$.
18. $a_1 = (4; 2; 5; 7)$, $a_2 = (5; 1; 4; 4)$, $a_3 = (2; 5; 3; 9)$,
$b_1 = (4; 0; 3; 2)$, $b_2 = (10; 5; 9; 13)$, $b_3 = (16; 10; 15; 24)$.
19. $a_1 = (0; 1; 1; 2)$, $a_2 = (7; 1; 3; 5)$, $a_3 = (8; 4; 4; 9)$,
$b_1 = (8; 2; 4; 7)$, $b_2 = (8; 3; 4; 8)$, $b_3 = (14; 3; 7; 12)$.
20. $a_1 = (3; 9; 4; 13)$, $a_2 = (7; 9; 4; 12)$, $a_3 = (-1; 9; 4; 14)$,
$b_1 = (6; 8; 3; 10)$, $b_2 = (4; 5; 1; 5)$, $b_3 = (2; 2; -1; 0)$.
21. $a_1 = (2; 6; 3; 9)$, $a_2 = (5; 0; 1; 2)$, $a_3 = (14; 12; 8; 22)$,
$b_1 = (6; 1; 2; 4)$, $b_2 = (7; 3; 3; 7)$, $b_3 = (12; 6; 5; 13)$.

22. $a_1 = (1; 0; 2; 2)$, $a_2 = (0; 6; 2; 9)$, $a_3 = (4; 9; 6; 16)$,
$b_1 = (1; 7; 3; 11)$, $b_2 = (-2; 5; 0; 6)$, $b_3 = (-5; 3; -3; 1)$.
23. $a_1 = (1; -1; 2; 1)$, $a_2 = (5; 4; 3; 8)$, $a_3 = (4; 5; 2; 8)$,
$b_1 = (6; 5; 4; 10)$, $b_2 = (5; 5; 3; 9)$, $b_3 = (11; 7; 8; 17)$.
24. $a_1 = (1; 4; 0; 4)$, $a_2 = (-3; 3; 1; 5)$, $a_3 = (5; 5; -1; 3)$,
$b_1 = (-2; 4; 2; 7)$, $b_2 = (-4; 3; 0; 4)$, $b_3 = (6; -2; 2; -1)$.
25. $a_1 = (0; 6; 1; 7)$, $a_2 = (2; 3; 4; 6)$, $a_3 = (4; -6; 6; -2)$,
$b_1 = (1; 2; 3; 4)$, $b_2 = (2; 2; 4; 5)$, $b_3 = (4; 0; 7; 5)$.
26. $a_1 = (6; 7; 5; 12)$, $a_2 = (2; 9; 4; 14)$, $a_3 = (9; 15; 11; 27)$,
$b_1 = (3; 10; 5; 16)$, $b_2 = (-3; 5; -1; 5)$, $b_3 = (9; 0; 7; 6)$.
27. $a_1 = (4; 5; 3; 8)$, $a_2 = (3; 4; 0; 3)$, $a_3 = (0; 1; 3; 5)$,
$b_1 = (2; 3; -1; 1)$, $b_2 = (-1; -1; 2; 2)$, $b_3 = (10; 13; 3; 14)$.
28. $a_1 = (0; 4; -1; 3)$, $a_2 = (9; 6; 4; 9)$, $a_3 = (9; 14; 2; 15)$,
$b_1 = (8; 5; 3; 7)$, $b_2 = (-4; 0; 1; 2)$, $b_3 = (0; 5; 5; 11)$.
29. $a_1 = (5; 6; 4; 10)$, $a_2 = (3; -3; 1; -1)$, $a_3 = (4; 18; 6; 22)$,
$b_1 = (4; -2; 2; 1)$, $b_2 = (1; 6; 3; 8)$, $b_3 = (-1; 12; 2; 12)$.
30. $a_1 = (1; 2; 2; 4)$, $a_2 = (3; 2; 4; 7)$, $a_3 = (10; 8; 11; 20)$,
$b_1 = (4; 3; 5; 9)$, $b_2 = (2; 2; 1; 2)$, $b_3 = (8; 7; 7; 13)$.

Рекомендуемая литература

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1984. — 192 с.

2. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. —400 с.

3. *Дубротин Д.А.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1977. — 120 с.

4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 320 с.

5. *Куликов Л.Я.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 368 с.

6. *Рублев А.Н.* Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Высшая школа, 1972. — 224 с.

7. *Солодовников А.С., Торопова Г.А.* Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. — М.: Высшая школа, 1987. — 254 с.

Использованная литература

1. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987. — 496 с.

2. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — 2-е изд., доп. — М.: Высшая школа, 1994. — 206 с.

3. *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.

4. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1974. — 384 с.

5. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999. — 384 с.

6. *Сборник залач по алгебре* /Под ред. Кострикина А.И. — М.: Факториал, 1995. — 454 с.

7. *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1968. — 304 с.

Список типовых расчетов

Аналитическая геометрия

1. Векторная алгебра
2. Линии второго порядка

Линейная алгебра

1. Системы линейных уравнений
2. Линейные пространства
3. Евклидовы пространства
4. Линейные операторы
5. Билинейные и квадратичные формы

Общая алгебра

1. Комплексные числа
2. Алгебраические структуры

Учебное издание

Александр Аркадьевич Айзикович
Татьяна Сергеевна Быкова

Сборник типовых расчетов
по алгебре и геометрии
(линейные пространства)

В авторской редакции

Компьютерная верстка *А.А.Айзикович, Т.С.Быкова*
Корректор *И.О.Фамилия*

Оригинал-макет подготовлен с помощью издательской системы
LaTeX 2_ε (MiKTeX) на оборудовании кафедры ПМИ ИжГТУ

Издательство ИжГТУ. Лицензия ЛР №020885 от 24.05.99.
Подписано в печать 00.00.2004. Бумага офсетная. Формат 60x84/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 00,00. Уч.-изд.л. 00,00.
Тираж 100 экз. Заказ №000.

Типография Издательства ИжГТУ.
Лицензия РФ ПД №00525 от 28.04.2000.
426069, г.Ижевск, ул.Студенческая,7.