Вариант №1

1. Найти производную поля $\varphi(\eth)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-x^2yz$ в точке $A(1,2,1)$ в направлении, образующем равные острые углы с осями координат.

2. Найти угол между градиентами скалярных полей $v(x,y,z)=\frac{x^3}{2}+6y^3+3z^3\sqrt{6}$, $u(x,y,z)=\frac{x^2}{yz^2}$ в точке $M\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\left(2xyz+z^2-\frac{z}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^2z-1\right)\vec{j}+\left(x^2y+2xz+\frac{1}{x}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля градиентов функции $\varphi(\tilde{o},y,z)=y^2+xz+x-z$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(yz-x^2\right)\vec{i}+\left(xz-y^2\right)\vec{j}+\left(xy-z^2\right)\vec{k}$ при перемещении по линии $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,\\ z=1\end{cases}$ из точки $A(2,0,1)$ в точку $B(0,4,1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=y^2\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(2,0,4)$. Нормальный вектор плоскости образует острый угол с осью OX.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y+2z)\vec{j}+(x+y+z)\vec{k}$ через полусферу $z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для вектора $\vec{a}=yz\vec{i}+\left(xz-x^2+x\right)\vec{j}+xy\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования боковую поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями $x-3y-2z=6$, $x=0$, $y=0$ $(z\le 0)$, а за контур интегрирования – линию пересечения её с плоскостью $z=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})=0$.

10. Вычислить $\vec{\nabla}\times\left((\vec{r},\vec{a})\,\vec{b}\right)$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постоянные векторы, а $\vec{r}$ - радиус-вектор точки.

Вариант №2

1. Дано скалярное поля $\varphi(M)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$. Найти $\vec{\nabla}\varphi,\ \vec{\nabla}\varphi^2,\ \vec{\nabla}\frac{1}{\varphi}$. Построить поверхности уровня $\varphi=0,\ \varphi=\pm1,\ \varphi=\pm2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=4\ln\left(3+x^2\right)-8xyz$ в точке $\grave{I}\ (1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2-2y^2+2z^2=1$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(3x^2(y-z)+\frac{1}{y}+\frac{2y}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^3-\frac{x}{y^2}-\frac{2}{x}\right)\vec{j}+\left(-x^3-2z\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля градиентов функции $\varphi(\tilde{o},y,z)=z^2+xy+x-y$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\dfrac{yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}}{1+x^2y^2z^2}$ при перемещении по линии (L): $x=1,\ y^2+9z^2=4$ из точки $A\left(1,\sqrt{3},\frac{1}{3}\right)$ в точку $B\left(1,\,1,\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+2y)\,\vec{i}+z^2\vec{j}+y\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=4$, лежащую в I октанте и отсеченную плоскостями $z=0,\ z=3$ в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=xy\vec{i}-(x+y)\vec{j}-zx\vec{k}$ через часть поверхности $y=7-\sqrt{z^2+x^2}$, отсеченную плоскостью $y=3$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=2z\vec{i}-(3x+z)\vec{j}-x^2z\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую в I октанте образованную поверхностью $y^2=1-x-z$ и плоскостями $x=0,\ z=0$, а за контур интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $y=0$.

9. Доказать, что вектор $\vec{a}=u\cdot\operatorname{grad}v$ ортогонален к вектору $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $u(\tilde{o},y,z)$, $v(\tilde{o},y,z)$ – дифференцируемые скалярные функции.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b})\right)$, где $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Вариант №3

1. Найти градиент поля $\varphi(\grave{I}\ ) = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(x, y, z)$. Построить поверхности уровня поля, соответствующие значениям $\varphi = \pm 1$, $\varphi = 2$, $\varphi = 3$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$ в точке $M(2,4,2)$ по направлению нормали к поверхности $4z + 2x^2 - y^2 = 0$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a} = \left(3yx^{3y-1} - 1\right)\vec{i} + \left(3x^{3y}\ln x - z\right)\vec{j} + (-y-1)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля градиентов функции $\varphi(\tilde{o}, y, z) = yz + \frac{1}{2}x^2 + y - z$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F} = \dfrac{yz\vec{i} - xz\vec{j} - xy\vec{k}}{zy\sqrt{y^2z^2 - x^2}}$ при перемещении по линии от точки $A\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ до точку $B(2, 4, 1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = y\vec{i} + \vec{j} + \frac{z}{\pi}\vec{k}$ через часть поверхности $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 4z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную полусферой $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2 - 1$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = x\vec{i} + \left(4y^2 + y^2z\right)\vec{j} - 4z^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность, $y^2 + z^2 = 9$, $x = 1$, а за поверхность интегрирования – поверхность цилиндра $y^2 + z^2 = 9$, $x = 5$, натянутую на этот контур.

9. Доказать, что вектор $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}u \times \vec{a}$, где $u = u(x, y, z)$ - дифференцируемая функция.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f(r)\right)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r = |\,\vec{r}\,|$, $f(x)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. В каком случае $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f(r)\right) = 0$?

Вариант №4

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi(x,y,z)=\left(\vec{a},\vec{r}\right)$, где $\vec{a}$ - постоянный вектор, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки поля. Построить поверхности равного потенциала $\varphi=\pm 1$, $\varphi=\pm 2$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=-2\ln\left(x^2-6\right)-4xyz$ в точке $\grave{I}\ (1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+2y^2-2z^2=1$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ .

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(\frac{zy}{x^2}+\frac{1}{1+(x-y)^2}\right)\vec{i}+\left(2y-\frac{1}{1+(x-y)^2}-\frac{z}{x}\right)\vec{j}-\left(\frac{y}{x}+1\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(y-1)\,\vec{i}+(x+1)\,\vec{j}+(z-2)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\dfrac{x^2}{y}\,\vec{i}+xy\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ при перемещении по меньшей дуге кривой $x^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}},\ y=1$ от точки $A(2,1,0)$ к точке $B(0,1,2)$,

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x\,\vec{j}+\dfrac{1}{\pi}(z+4)\,\vec{k}$ через часть поверхности $z=4-x^2-y^2$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x+z)\,\vec{i}+(x+y)\,\vec{j}+(y+z)\,\vec{k}$ через часть поверхности $y=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, отсеченную плоскостью $z=1$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=(yz+4x)\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования эллипс $9z^2+4x^2=36,\quad y=0$, а за поверхность интегрирования – часть поверхности цилиндра $9z^2+4x^2=36\ \ (0\le y\le 3)$ и часть плоскости $y=3$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$.

10. Найти $\vec{\nabla}\times(r\,\vec{a})$, где $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, а $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Вариант №5

1. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид $\varphi(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)+z^2$. Найти длину и направление вектора напряженности поля. Какую форму имеют эквипотенциальные поверхности?

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\frac{1}{4}x^2y-\sqrt{x^2+5z^2}$ в точке $\grave{I}\ \left(-2,\frac{1}{2},1\right)$ по направлению нормали к поверхности $z^2=x^2+4y^2-4$, образующей тупой угол с направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=2\left(x+y-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2yz}\right)\vec{i}+2\left(x+y+\frac{1}{xy^2z}\right)\vec{j}-2\left(z-\frac{1}{xyz^2}\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля $\vec{a}=\left(-x+1\right)\vec{i}+\left(z+3\right)\vec{j}+\left(y+3\right)\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=\frac{x^2}{y}\vec{i}+xy\vec{j}+\frac{z}{x}\vec{k}$ по меньшей дуге окружности $x^2+z^2=1,\ y=1$ от точки $A(1,1,0)$ до точке $B(0,1,1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами в точках $A(-4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(-4,0,4)$. Нормальный вектор плоскости образует с осью OY острый.

7. Найти поток поля $\vec{a}=y\,\vec{i}+y^2\vec{j}+2z^2\vec{k}$ через границу пространственной области $\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)<z<6-\sqrt{x^2+y^2}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=2xy\vec{i}+\left(x^2+2yz\right)\vec{j}+3y^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования астроиду $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=0$, а за поверхность интегрирования – часть плоскости XOY, ограниченную астроидой.

9. Доказать, что поле вектора $\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v$ соленоидально, если $u=u(\tilde{o},y,z)$, $v=v(\tilde{o},y,z)$ – дифференцируемые скалярные функции.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, где $\vec{a}=\cos r\left(y\vec{i}-2\vec{j}+xz\vec{k}\right)$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$.

Вариант №6

1. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид $\varphi(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)-z^2$. Найти модуль и направление вектора напряженности поля. Какую форму имеют эквипотенциальные поверхности ?

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=xz^2-\sqrt{x^3y}$ в точке $M(2,2,4)$ по направлению нормали к поверхности $x^2-y^2-3z+12=0$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(yz+z^2-y+\frac{z}{x^2y}\right)\vec{i}+\left(xz-x-1+\frac{z}{xy^2}\right)\vec{j}+\left(xy+2xz-\frac{1}{xy}\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+(x-y)^2\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=(y-z)\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(x-y)\,\vec{k}$ при перемещении по линии $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\x+4z=4.\end{cases}$

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+2z)\,\vec{i}+x\,\vec{j}+y^2\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=4$, лежащую во II октанте и отсеченную плоскостями $z=0,\ z=1$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=xz\,\vec{i}+xy\,\vec{j}+z^2\vec{k}$ через часть поверхности $z=-\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченную плоскостью $z=-2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+(x+y)\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования – поверхность, лежащую в первом октанте, образованную параболоидом $x=4-z^2-y^2$, а за контур интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $x=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}(u\,\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad}u$, где $u=u(x,y,z)$ - дифференциальная функция.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, для поля вектора $\vec{a}=\sin r\left(x\vec{i}-2y\vec{j}+3z\vec{k}\right)$, где $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант №7

1. Потенциальная энергия частиц имеет вид $u(x,y,z)=\alpha\ \ln r,$ где $r-$ модуль радиуса - вектора $\vec{r}$ частицы, α - постоянная величина. Найти силу $\vec{F}$ действующую на частицу. Какую форму имеют поверхности, для которой модуль вектора силы $\vec{F}$ постоянен? Изобразить эти поверхности для случаев $\left|\ \vec{F}\ \right|=1$, $\left|\ \vec{F}\ \right|=2$, $\left|\ \vec{F}\ \right|=3$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=x\sqrt{y}-yz^2$ в точке $\grave{I}\ \left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2=4z$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(z^2-y+\frac{z}{\sin^2 xz}\right)\vec{i}+\left(z-x\right)\vec{j}+\left(y+2xz-1+\frac{x}{\sin^2 xz}\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(1-x)\ \vec{i}+(z+3)\vec{j}+(y+3)\ \vec{k}$.

5. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a}=-x^2y^3\vec{i}+2\vec{j}+xz\vec{k}$ вдоль контура $x^2+y^2=2,\ z=1$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\left(\frac{4}{\pi}x+z\right)\vec{i}+\left(x+y\right)\vec{k}$ через часть поверхности $x=3-\sqrt{y^2+z^2}$, лежащую в I октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=2x\vec{i}+y\vec{j}+3z\vec{k}$ через границу выпуклой области, заключенной между поверхностями $x^2+y^2+z^2=9$ и $x^2+z^2+2y-6=0$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=\left(yz+x+2y^2\right)\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=a^2,\ z=0$, а за поверхность интегрирования – поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2\ \left(0\le z\le 14\right)$ и плоскость $z=0$.

9. Доказать, что $\Delta(uv)=u\ \Delta v+v\ \Delta u+2\left(\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v\right)$, если $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ - дважды дифференцируемые скалярные функции.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ для поля вектора $\vec{a}=\cos r\cdot\left(2x\ \vec{i}+3y\ \vec{j}+z\ \vec{k}\right)$, где $r=\left|\ \vec{r}\ \right|$, $\vec{r}-$ радиус-вектор точки.

Вариант №8

1. Потенциальная энергия частицы имеет вид $u = \frac{4x^2 + (y-1)^2}{z^2}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Построить эквипотенциальные поверхности $u=0$, $u=1$, $u=4$.

2. Найти производную функции $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{yz}{x}$ в точке $M\ (-1,1,1)$ в направлении градиента функции $\varphi(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1$.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a} = \frac{y^2}{x^2}\,\vec{i} + \left(z\cos yz - \frac{2y}{x} + \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(y\cos yz + 2z - \frac{1}{y}\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля $\vec{a} = (z-1)\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (x+1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F} = y^2\vec{i} - xz\,\vec{j} + zxy\vec{k}$ при перемещении по меньшей дуге кривой $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ от точки $A\left(\sqrt{2},\,0,\,\sqrt{2}\right)$ к точке $B\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = z\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ через часть поверхности $y = 8 - z^2 - x^2$, лежащую во II октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$, отсеченную плоскостью $z=2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = 5y^2z\,\vec{i} + 5z^2x\,\vec{j} + 5x^2y\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования часть параболы $x + y^2 = 4$, $z=2$ и замыкающей её прямой $z=2$, $x=0$, а за поверхность интегрирования часть поверхности $z=2$, ограниченную этим контуром.

9. Доказать, что $\operatorname{grad}(u\cdot v) = v\cdot\operatorname{grad}u + u\cdot\operatorname{grad}v$, где $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ - дифференцируемые функции. Проверить, что $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(uv)) = 0$.

10. Для поля вектора $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, потенциал и векторные линии, если $r = |\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант №9

1. Потенциальная энергия частицы имеет вид $u(x,y,z)=\dfrac{2}{x^2+y^2+z}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=\pm 1$, $u=\pm 2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=7\ln\left(\frac{1}{13}+x^2\right)-4xyz$ в точке $\grave{I}\ (1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $7x^2-4y^2+4z^2=7$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(yz\cos(xyz)-\frac{z}{x^2}\right)\vec{i}+\left(xz\cos(xyz)-\frac{3y^2}{z}\right)\vec{j}+\left(xy\cos(xyz)+\frac{y^3}{z^2}+\frac{1}{x}+2z\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\left(z^2-y^2\right)\vec{i}+z\vec{j}-y\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ при перемещении по кривой $\begin{cases} y=x^2, \\ z=2 \end{cases}$ от точки $A(1,1,2)$ к точке $B(2,4,2)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}-3z\vec{j}+(x+z)\vec{k}$ через плоский четырехугольник с вершинами в точках $M_1(1,-2,4)$, $M_2(3,2,4)$, $M_3(-1,2,4)$, $M_4(-3,-2,4)$ в направлении оси OZ.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(y+2x)\vec{i}-(z-12y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую пространственную область $\begin{cases} x^2+y^2<4y, \\ 0<z<x^2+y^2, \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=yz^2\vec{i}+zx^2\vec{j}+xy^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=16$, $z=4$, а за поверхность интегрирования – любую поверхность, натянутую на эту окружность.

9. Доказать, что $\vec{\nabla}\left(u^n\right)=n\,u^{n-1}\vec{\nabla}u$, где $u=u(\tilde{o},y,z)$ – дифференцируемая функция.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ для вектора $\vec{a}=\dfrac{\vec{r}\,\ln r}{r}$, где $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант №10

1. Потенциальная энергия частицы имеет вид $u(x,y,z) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=\frac{\pi}{6}$, $u=\frac{\pi}{4}$, $u=\frac{\pi}{3}$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\dfrac{x\,y}{z}$ по направлению вектора $\overrightarrow{MA}$ в точке M, если $\grave{A}(0,3,4)$, $\grave{I}\ (1,2,1)$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\left(-\dfrac{2e^z}{x^3}+\dfrac{1}{x}\right)\vec{i}+\dfrac{1}{z^3}\,\vec{j}+\left(\dfrac{e^z}{x^2}-\dfrac{3y}{z^4}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(2y-z)\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy^2z^2\,\vec{i}+2yx^2z^2\,\vec{j}+2zx^2y^2\vec{k}$ при перемещении по прямой из точки $A(2,\,0,\,1)$ к точке $B(4,2,3)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\left(2x+y^2\right)\vec{i}+z^2\,\vec{j}+x\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+z^2=4$, лежащую в I октанте и отсеченную плоскостями $y=1$, $y=4$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x-z)\,\vec{i}-(z-y)\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\sqrt{x^2+y^2}<z<\sqrt{2-x^2-y^2}$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=\left(4x^2+x^2z\right)\vec{i}+y\,\vec{j}-4z^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+z^2=9$, $y=1$, а за поверхность интегрирования – полусферу, натянутую на этот контур.

9. Вычислить $\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)$, где $f(r)=\dfrac{\sin r}{r}$, $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}$. Доказать, что пространственное поле вектора $\vec{a}=f(r)\cdot\vec{r}$ будет соленоидальным только тогда, когда $f(r)=\dfrac{c}{r^3}$, $(c\in R)$.

10. Найти $\operatorname{rot}\dfrac{\vec{a}}{r}$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор, $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Вариант №11

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi(r)=\arcsin\frac{1}{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\vec{r}|$. Построить поверхности равного потенциала для случаев $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

2. Найти производную поля $f(x,y,z)=x^3y^2z$ в направлении градиента функции $\varphi(x,y,z)=x^2-4xy+5y-6z^2$ в точке $M\left(3,1,\frac{1}{3}\right)$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\left(-\frac{3y}{x^4}+\frac{4x^3}{y^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2x^4}{y^3}+3y^2\right)\vec{j}-5z^4\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\left(x+y^2+z^2\right)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=x\vec{i}-\frac{z^2}{3}\vec{j}+y\vec{k}$ при перемещении по замкнутому контуру $\begin{cases}4x^2+9y^2=1,\\ z=2x-y-\frac{1}{4}.\end{cases}$

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\left(\frac{2}{\pi}y+z\right)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ через часть поверхности $y=\sqrt{z^2+x^2}$, лежащую в I октанте и отсеченную плоскостью $y=3$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases}x^2+y^2<2,\\ 0<z<y^2,\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=\left(4x^2+yx^2\right)\vec{i}-4y^2\vec{j}+z\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=a^2,\ z=0$, а за поверхность интегрирования – часть поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2,\ (0\le z\le 4)$ и $z=4$.

9. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, где $r^2=x^2+y^2+z^2$, а $f(r)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция от r.

10. Найти $\nabla\times\vec{a}$, если $\vec{a}=\frac{\vec{c}}{\sin r}$, $\vec{c}=\{y,z,x\}$, $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Вариант №12

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi\,(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $\varphi=0$, $\varphi=\pm 1$.

2. Найти производную поля $u\,(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+x\,z$ в точке $M\left(2,\,2,-1\right)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2-2\,z=10$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\left(4\,x^3e^y-\dfrac{5\,z^3}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^4\,e^y-1\right)\vec{j}+\left(\dfrac{15\,z^2}{x}-1\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(z-y)\,\vec{i}+(z-3)\,\vec{j}+(y-3)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ при перемещении по замкнутому контуру $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x=z.\end{cases}$

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\dfrac{2}{\pi}(x-4)\,\vec{i}+z\,\vec{j}+6\,\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2+z^2=4$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y\,\vec{j}+2\,z\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases}x^2+y^2<6\,y,\\ 0<z<\frac{1}{16}\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=y\,z^2\,\vec{i}+z\,x^2\,\vec{j}+x\,y^2\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=9$, $z=1$, а за поверхность интегрирования – часть параболоида $x^2+y^2=9\,z$, натянутого на этот контур.

9. Доказать, что $\vec{\nabla}\varphi=\vec{c}+\dfrac{d\,f}{d\,r}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$, где $\varphi=\left(\,\vec{c}\,,\,\vec{r}\right)+f\left(r\right)$, $\vec{c}$ - постоянный вектор, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$, $f(r)$ - произвольная дифференцируемая функция от r.

10. Для поля вектора $\vec{a}=r^3\cdot\vec{r}$. Найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, если $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$.

Вариант №13

1. Потенциальная энергия частицы задана функцией $u(x,y,z)=\arccos\frac{\sqrt{x^2+yz}}{y}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=\frac{\pi}{6}$, $u=\frac{\pi}{4}$, $u=\frac{\pi}{3}$.

2. Найти производную поля $f(x,y,z)=x\,y^3z^4$ в направлении градиента функции $\varphi(x,y,z)=x^3-4x^2y+5z^2+3$ в точке $M\left(-1,\frac{1}{2},-1\right)$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=-\frac{y\,z^4}{x^2}\,\vec{i}+\left(\frac{z^4}{x}+z\,e^{zy}+6\,y^5\right)\vec{j}+\left(\frac{4\,y\,z^3}{x}+y\,e^{zy}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{x-3}+\frac{\vec{j}}{y+4}-\frac{\vec{k}}{z+9}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(y\,z-x^2\right)\vec{i}+\left(x\,z-y^2\right)\vec{j}+\left(x\,y-z^2\right)\vec{k}$ при перемещении по окружности $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ z=0,\end{cases}$ лежащей в I октанте, от точки $A(3,0,0)$ к точке $B(0,3,0)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+y)\,\vec{i}+y\,\vec{j}-z\,\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(2,0,4)$, $C(2,-2,0)$. В направлении оси OX.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x-z)\,\vec{i}+(x-y)\,\vec{j}+(z-y)\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $x^2+y^2<z<\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=y^2z\,\vec{i}+z^2x\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=4$, $z=2$, а за поверхность интегрирования – круг, ограниченный этой окружностью.

9. Доказать, что $\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)=3\,f(r)+r\,\frac{d\,f}{d\,r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$, $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция от r.

10. Для поля вектора $\vec{a}=r^3\vec{c}$ найти $\operatorname{rot}\,\vec{a}$, если

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\quad \vec{c}=2\,x\,\vec{i}+y^2x\,\vec{j}-z\,\vec{k}.$$

Вариант №14

1. Потенциальная энергия частицы задана функцией $u(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=0$, $u=\pm1$, $u=\pm2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+z^2}$ в точке $M(0,0,5)$ по направлению нормали к поверхности $x^2-6x+9y^2+z^2=4z+5$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(y^4+z\,x^{z-1}+2\,y\,x^{y-1}\right)\vec{i}+\left(4\,x\,y^3+2\,x^y\ln x\right)\vec{j}+\left(x^z\ln x+1\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(y+2)\,\vec{i}+(x-2)\,\vec{j}-z\,\vec{k}$.

5. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\dfrac{1}{y}\,\vec{i}+\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{y^2}\right)\vec{j}-\dfrac{y}{z^2}\,\vec{k}$ является потенциальным и вычислить линейный интеграл этого вектора от точки $A(-2,-3,-1)$ до точки $B(4,6,2)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+z)\,\vec{i}+x\,\vec{j}+y\,\vec{k}$ через часть поверхности $z^2+x^2=4$, лежащую в IV октанте и отсеченную плоскостями $y=-3$, $y=-1$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=z\,\vec{i}+(x+y)\,\vec{j}+y\,z\,\vec{k}$ через часть поверхности $y=z^2+x^2-4$, отсеченную плоскостью $y=-2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=(y-z)\,\vec{i}+z\,\vec{j}+y\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования – поверхность, лежащую в I октанте, ограниченную параболоидом $y=9-x^2-z^2$ и плоскостями $x=0$, $z=0$, а за линию интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $y=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)=\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{a}\right)-\Delta\,\vec{a}$.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, для вектора $\vec{a}=\vec{r}\,\sin^2 r$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$.

Вариант №15

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого задан функцией $\varphi(M)=x^2+3y^2-z^2$. Построить поверхности равного уровня для случаев $\varphi=0,\ \varphi=\pm1,\ \varphi=\pm2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$ в точке $M(3,\,4,\,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2=25z$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(-yzx^{y-1}+1\right)\vec{i}+\left(5zy^4-x^yz\ln x-2y\right)\vec{j}+\left(y^5-x^y-3z^2\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=z\,\vec{i}+(z-x)^2\,\vec{j}+x\,\vec{k}$.

5. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a}=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ по контуру, составленному из осей координат и дуги кривой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ между точками $A(a,0,1)$ и $B(0,a,1)$ в плоскости $z=1$.

6. Найти поток поля $\vec{a}=y\,\vec{i}+\left(x+\dfrac{y}{2\pi}\right)\vec{k}$ через часть поверхности $y=-\sqrt{z^2+x^2}$, лежащую в IV октанте и отсеченную плоскостями $y=-2$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases}(x-2)^2+y^2<4,\\ 0<z<8-x,\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=yz\,\vec{i}+(xz+4x)\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования эллипс $4x^2+y^2=4,\ z=0$, а за поверхность интегрирования – часть поверхности цилиндра $\begin{cases}4x^2+y^2=4,\\ 0\le z\le 2,\end{cases}$ и плоскости $z=2$.

9. Показать, что любое решение уравнения $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)-k^2\vec{a}=0$, удовлетворяющее условию соленоидальности, удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\vec{\nabla}^2\vec{a}+k^2\vec{a}=0$.

10. Вычислить $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{div}\vec{a}$, где $\vec{a}=\left(yz\vec{i}-2xz\vec{j}\right)\cos r$, $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Вариант №16

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого равен функцией $\varphi(M) = x^2 - 2x + 1 + 4z^2 - 4y$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $\varphi = 0$, $\varphi = \pm 4$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z) = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$ в точке $M(1, 1, -2)$ по направлению нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора
$$\vec{a} = \frac{10x^4}{y}\,\vec{i} + \left(\frac{z}{1+y^2z^2} - \frac{2x^5}{y^2} + \frac{2y}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{y}{1+y^2z^2} - 1 - \frac{y^2}{z^2}\right)\vec{k}$$
потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a} = (y-2)\,\vec{i} + (x-2)\,\vec{j} + (z+2)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F} = \frac{x^2}{z}\,\vec{i} + \frac{y^2}{z}\,\vec{j} + xy\vec{k}$ при перемещении по дуге окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, расположенной в I октанте между точками $A(1, 0, 1)$ и $B(0, 1, 1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = \left\{y,\, x,\, \frac{z}{\pi}\right\}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащую в III октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 3zx\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды с вершинами в точках $A(4, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $O(0,0,0)$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = z\,\vec{i} + x\vec{j} + (x-y)^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x = b\cos t$, $y = 0$, $z = b\sin t$, а за поверхность интегрирования – поверхность конуса с высотой H, натянутую на этот контур.

9. Доказать, что $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{r}\,(\vec{r}, \vec{a})\right) = 4\,(\vec{a}, \vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля, $\vec{a}$ – заданный постоянный вектор.

10. Найти $\mathrm{rot}\left(\vec{a}\,f(r)\right)$, где $\vec{a} = y\,\vec{i} - 2\vec{j} + xz\vec{k}$, $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Вариант №17

1. Потенциальная энергия частицы задана функцией $u(x,y,z)=x^2+2x+1-3z^2-9y$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=0$, $u=\pm 9$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$ в точке $M(1,1,0)$ по направлению нормали к поверхности $z=x^2-y^2$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a}=\left(-yz\sin x\,\vec{i}-\frac{3}{z}\right)\vec{i}+\left(z\cos x+1\right)\vec{j}+\left(y\cos x+\frac{3x}{z^2}+1\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=y(z-1)\,\vec{i}+x(z-1)\,\vec{j}-xy\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=yz^2\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+y^2x\,\vec{k}$ при перемещении по прямой из точки $A(2,3,-1)$ и $B(4,6,-2)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+y)\,\vec{i}+(z+y)\,\vec{j}+(x+y)\,\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами $A(6,6,0)$, $B(-6,6,0)$, $C(0,6,6)$ в направлении оси OY.

7. Найти поток поля $\vec{a}=75\left(x^3\,\vec{i}+y^3\,\vec{j}+z^3\,\vec{k}\right)$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases} x^2+y^2<x, \\ 0<z<\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=3y^2\vec{i}-3z^2\,\vec{j}+3x^2\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую в I октанте, ограниченную сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, а за линию интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $z=0$.

9. Доказать, что в потенциалом поле вектора $\vec{a}$ его потенциал $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$.

10. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{div}\vec{a}$ для вектора $\vec{a}=(r\sin r)\cdot\vec{r}$, $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант №18

1. Потенциальная энергия частицы описывается функцией $u(M) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y + 4z^2 - 16z + 15$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u = 0$, $u = \pm 4$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1, 1, 0)$ по направлению нормали к поверхности заданной уравнением $2x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a} = -\dfrac{4x^3}{z^3}\,\vec{i} + (z\cos y - 1)\,\vec{j} + \left(\sin y + \dfrac{3x^4}{z^4} + 2z\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a} = (1+z)\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (x-1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить циркуляцию ротора вектора $\vec{F} = yz^2\,\vec{i} + x^2 z\,\vec{j} + x^2 y\,\vec{k}$ по контуру, состоящему из дуги параболы $y = x^2$ и отрезка прямой $y = x$ в плоскости $z = 0$.

6. Найти поток поля $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через часть поверхности $(z-4)^2 + x^2 = 16$, лежащую во II октанте и отсеченную плоскостями $y = 0$, $y = 2$, в направлении внешней нормали.

7. Вычислить поток поля $\vec{a} = xy\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через часть поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ отсеченную плоскостью $z = 2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + (x-y)\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую во II октанте, ограниченную сферой с центром в начале координат радиуса а и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, а за контур интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $x = 0$.

9. Доказать, что $\vec{\nabla} \cdot \left(\varphi\, \vec{\nabla}\varphi\right) = \varphi\, \Delta\varphi + \left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2$, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ - дважды дифференцируемая функция.

10. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{div}\vec{a}$ для вектора $\vec{a} = \left(\vec{r} + \vec{b}\right)\cos r$, где $r = |\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, $\vec{b}$ - постоянный вектор.

Вариант №19

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого описывается функцией $\varphi(x,y,z)=\dfrac{3}{x^2+y+z^2}$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $\varphi=\pm 1,\ \varphi=\pm 2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=4\ln\left(3+y^2\right)-8xyz$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+2y^2-2z^2=1$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора
$$\vec{a}=\left(z e^{4y}-\frac{3z^3}{x^4}\right)\vec{i}+\left(4xz\,e^{4y}-5y^4\right)\vec{j}+\left(xe^{4y}+\frac{3z^2}{x^3}+1\right)\vec{k}$$
потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(1+z)\,\vec{i}+x\,\vec{j}+(y-1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{a}=yz\,\vec{i}-xz\,\vec{j}$ при перемещении по дуге винтовой линии $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=\dfrac{4t}{\pi}$ от точки пересечения кривой с плоскостью $z=0$ до точки её пересечения с плоскостью $z=8$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(y+2)\,\vec{i}-\dfrac{1}{\pi}(z-2)\,\vec{k}$ через часть поверхности $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, лежащую во II октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases} x^2+y^2<2y, \\ 0<z<4-y, \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=yz\,\vec{i}+\left(xz-\dfrac{1}{8}x^3\right)\vec{j}+xy\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования боковую поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями $x=0,\ y=0,\ x+2y-4z=8\ (z\le 0)$, а за контур интегрирования – линию её пересечения с плоскостью $z=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{rot}\left(\vec{c}\,f(r)\right)=\dfrac{1}{r}\dfrac{df}{dr}\left[\vec{r},\vec{c}\right]$, где $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $\vec{c}$ – постоянный вектор, $f(r)$- произвольная дифференцируемая функция от r.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ для поля вектора $\vec{a}=\vec{c}\sin r$, если $\vec{c}$ – постоянный вектор, $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант №20

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого описывается функцией $\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{y^2+z^2+x}$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $\varphi=\pm1,\ \varphi=\pm2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\ln\left(e^x+e^y+e^z\right)$ в начале координат по направлению луча, образующего угол 60° с осью абсцисс, угол 45° с осью ординат, а с осью аппликат – тупой угол.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\dfrac{1}{x+yz}\,\vec{i}+\left(\dfrac{z}{x+yz}-e^y+\dfrac{5}{y}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{y}{x+yz}+1\right)\vec{k}$ потенциально, найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(z-1)\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(x-1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=z\,y\,\vec{i}+\dfrac{z^2}{x}\,\vec{j}+\dfrac{y^2}{x}\,\vec{k}$ при перемещении вдоль линии (L): $x=4$, $x=4,\ y^2+z^2=16$ от точки $A(4,\,4,\,0)$ к точке $B(4,\,0,\,4)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x^3\,\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2+z^2=1$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=6xy\,\vec{i}+3y^2\,\vec{j}+5\,\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,-1)$, $D(0,0,0)$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=y^2z\,\vec{i}+z^2x\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=4,\ z=2$, а за поверхность интегрирования – поверхность кругового цилиндра $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ 0\le z\le 2,\end{cases}$ натянутую на эту окружность, и плоскость $z=0$.

9. Доказать, что вектор $\operatorname{div}(u\cdot\operatorname{grad}v)=u\cdot\Delta v+(\operatorname{grad}u,\,\operatorname{grad}v)$, где $u=u(\tilde{o},y,z)$, $v=v(\tilde{o},y,z)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

10. Вычислить $\operatorname{rot}\left((\vec{r},\,\vec{a})\cdot\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=2\,\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=3\,\vec{i}+2\,\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$.