Вариант 1

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^3}^{2x} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0,\ x = 0,\ z = 0,\ x = \sqrt{3}y,\ z \geq 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ:
треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2},\sqrt{6})$, $\gamma = x^2 + y^2$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части:
часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенная внутри цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры:
дуга $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leq t \leq \pi/2$; линейная плотность в точке $M(x,y,z)$ пропорциональна произведению координат x и y.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $y^2 = \frac{4}{9}(x-2)^3$, отсечена прямой $x = 3$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат. Тело, ограниченное поверхностями $z = 1 + x,\ y - x = 1,\ x = 0,\ y = 0, z = 0$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = 2z + 1$ на поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

Вариант 2

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^8 dx \int\limits_{x/2}^{\sqrt{10x-x^2}} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$2x+y=z,\ x-2y+5=0,\ 2x+3y=18,\ y=2,\ z=0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: кольцо $\frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2;\quad \gamma=\left|\cos\sqrt{x^2+y^2}\right|$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: $z^2=2xy$ при $0\le y\le 4,\ 0\le x\le 2,\ z\ge 0$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры:
дуга $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t,\ -\infty<t\le 0$; $\gamma(x,y,z)-const$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x^2=(y+1)^3$, отсечена прямой $y=4$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: тело, ограниченное поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ при $\gamma=z/R$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2z+1$ на поверхности $y+z=1$, ограниченной плоскостями $x=0,\ x=1,\ y=0,\ z=0$.

Вариант 3

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^2+1} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{2} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x^2 + y^2 - z + 2 = 0, x^2 + y^2 + 4z - 13 = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: часть поверхности $y = \sqrt{c^2 - z^2}, x = 0, x = a, \gamma = y(x+z)$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, расположенного внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородное тело, ограниченное плоскостями $2x + 3y = 12$, $x = 0, y = 0, z = 0$ и цилиндрической поверхностью $z = \frac{1}{2}y^2$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: дуги $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t, \; z = 4t, 0 \le t \le 2\pi$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y) = x + y$ на $x + y \le 2, \; 0 \le y \le x$.

Вариант 4

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{\frac{x^2-4x}{4}}^{2-x} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2-z=0, x=2, y=3, x=0, y=0, z=0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело, ограниченное поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=c$, $c>0$; $\gamma=(x^2+y^2+z)^4$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть цилиндра $y^2+z^2=R^2$, заключённого внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: часть цилиндрической поверхности $y=\sqrt{9-z^2}$, отсечённой плоскостями $x=0$, $x=2$; поверхностная плотность $\gamma(x,y,z)=ky(x+z)$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho=a\sin\varphi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат дуги $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}, 0\le t\le 1$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y)=x-y$ на $x+y\le 1$, $x-y\le 1, x\ge 0$.

Вариант 5

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\sqrt{y-1}}^{2-\frac{y}{2}} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело, ограниченное поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $\gamma = \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть параболоида $x^2 + y^2 = 6z$, заключённого внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2z$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: часть плоскости $x + y + z = 1$, заключённой в первом октанте, поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) = (1 + x + z)^{-2}$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t$ от $A(1;0;1)$ до $B\left(0; e^{\pi/2}; e^{\pi/2}\right)$

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: дуги $y = \frac{2}{3}x^{1,5},\ \ z = 0,$ $0 \le x \le 1$ при $\gamma = k / \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x, y)$ на фигуре: $f(x, y) = x - y$ на $x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \le 0,\ \ x \le y$.

Вариант 6

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-4}^{4} dy \int\limits_{y^2/4-4}^{y^2/8-2} f(x,y)dx$ **.**

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x+2y+z=4, x=2y^2, y=0, z=0$

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: часть плоскости, ограниченная кривой $x^2+y^2=16$; $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная кривыми в плоскости XOY $3x^2=25y$, $5y^2=9x$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная дуга $y=\operatorname{ch} x,\ \ 0\le x\le \ln 2$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ \ y=2,\ \ z=2a\sin t-a\sin 2t,$
$0\le t\le 2\pi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2=a^2,\ x+z=a$, $z=0$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2z+1$ на поверхности $x+y=1$, ограниченной плоскостями $x=0, y=0, z=0, z=4$.

Вариант 7

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2>|ax|$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: часть поверхности $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, z\geq 0$, $\gamma=x^2+y^2+z^2$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная кривыми в плоскости XOY $xy=4$, $x+y=5$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородное призматическое тело, ограниченное плоскостями $x+2z=3,\ x=0,\ y=1,\ y=3,\ z=0$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x=2-t^4/4,\ \ y=4,\ \ z=t^6/6\ \ (t>0)$ между точками пересечения с плоскостями $x=0,\ z=0$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: часть плоскости $x^2+y^2\leq 2ay, z=0$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y)=3-x$ на $0\leq y\leq \operatorname{ch} x,\ x\in[-1,1]$.

Вариант 8

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: дуга
$x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=z, \gamma=\sqrt{x^2+2z^2}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть сферы $x^2+y^2+z^2=3a^2$, заключённая внутри параболоида $x^2+y^2=2az$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная плоская фигура, ограниченная линиями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho=1-\cos\varphi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: часть поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностями $y=x^2$, $y+x=2$, $y=0$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2-y$ на $x+y\le 2$, $0\le z\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Вариант 9

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_{x^2/2}^{2x-x^2} f(x,y)dy$ **.**

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело, ограниченное поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\gamma=(4x+3y+z-2)^{-4}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением кривой $y=x^3$ $(-2/3\le x\le 2/3)$ вокруг оси Ox.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная поверхность параболоида $y^2+z^2=10x$, отсечённая плоскостью $x=10$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: дуга $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t,\ \ z=4\sin\frac{t}{2},\ \ 0\le t\le\pi$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y)=x-y$ на $y\le x$, $0\le y\le 1,\ \ x\le 2$.

Вариант 10

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{y}^{1/y} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 8,\ x - y = 0,\ \sqrt{3}x - y = 0,\ z = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: дуга $\rho = a(1+\cos\varphi),\ \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Ox астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная плоская фигура, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и его хордой $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ z = 4t$ от $A(-1;0;2\pi)$ до $B(1;0;0)$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: тело, ограниченное поверхностями $y = x,\ y = 3x,\ z = 3x,\ x = 2,\ z = 0$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = 2z + 1$ на $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Вариант 11

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x/3}^{2x} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 x$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: поверхность $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(0 \le z \le 1)$, $\gamma = 5x^2+5y^2+3z^2$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Ox дуги $y^2 = 2x$ $(0 \le x \le 4)$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородное тело, ограниченное поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x=6t,\ y=3t^2,\ z=t^3$ от $O(0;0;0)$ до $B(6;3;1)$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: плоская фигура $1 \le x \le 2,\ \ x \le y \le 2x,\ \ z=0$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = 3x-1$ на $y=\sqrt{4-x^2}$ $(0 \le x \le 1)$.

Вариант 12

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{y^2/4-1}^{2-y} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y+z=2,\ y=x^2,\ z=0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: плоская фигура, заданная неравенствами $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 4$; $\gamma = x^4+2x^2y^2+y^4$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть поверхности $2x+2y+z=8R$, расположенная внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная дуга $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=1,\ \ 0\le t\le \pi$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $y=2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: тело $x^2+y^2+z^2\le R^2$, $z\ge 0$ при $\gamma = kz^2$ $\left(\gamma(0;0;R)=\gamma_0\right)$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2z+1$ на поверхности, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2y$.

Вариант 13

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$2x+3y=12,\ z=y^2/2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=0$; $\gamma=1/\left(x^2+y^2+z^2+1\right)$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная линиями $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=a$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: часть плоскости $z=x$, ограниченная плоскостями $x+y=1,\ y=0,\ z=0$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x=t^2,\ y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right)$ между точками пересечения с осью Ox.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: плоская область, ограниченная линией $x^2-2ax+y^2=0$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=z+1$ на 1-м витке кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t,\ z=e^t$.

Вариант 14

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = 1, x = 2$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело, ограниченное поверхностями $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$; $\gamma = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: полусфера; в каждой её точке поверхностная плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусфер.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho = \cos^4(\varphi/4)$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: кривая $x = t,\ y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y) = x + y$ на области, ограниченной линиями $y = x$, $y + x = 0, y = 1$.

Вариант 15

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x + 2y = z,\ x - 2y = 2,\ x - 2y = -5,\ x = 1,\ x = 3,\ z = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: поверхность $2z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0, \quad \gamma = x^2 + y^2 + z - 2$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Oy кривой $3x^2 + 4y^2 = 12$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$ $(z > 0)$; плотность в каждой точке $\gamma = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: полувиток винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $z = bt$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: плоская область, ограниченная линией $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8a^2xy$, $x \geq 0,\ y \geq 0$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y) = xy$ на линии $x - 2y + 3 = 0$ от $A(1,2)$ до $B(3,3)$.

Вариант 16

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{3\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = 25 - x^2 - y^2$, $x = -2$, $x = 2$, $y = -3$, $y = 3$, $z = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: плоская фигура, ограниченная линией $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$; $\gamma = x^2 - y^2$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть конуса $z^2 = x^2 + y^2$, ограниченная плоскостями $z = h_1$, $z = h_2$ $\left(0 < h_1 < h_2\right)$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: дуга кривой $x = t$, $y = t^2 + 1$, $z = 2$ между точками $A(0,1,2)$, $B(1,2,2)$; плотность в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $y = \ln x$ между точками $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: часть плоскости $z = 3y - x$, вырезанная плоскостями $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$, $y = 0$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = 2 - y$ на фигуре, ограниченной поверхностями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Вариант 17

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y+4} f(x,y)dx + \int\limits_3^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = az\left(x^2+y^2\right)$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: дуга кривой $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ 0 \le t \le 1$; $\gamma = \sqrt{1+4y+9xz}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Ox одной волны синусоиды.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: плоская фигура, ограниченная линиями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$; $\gamma(x,y)=const$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x=e^t\left(\cos t+\sin t\right),\ y=e^t\left(\cos t-\sin t\right)$ между $t_1=0$ и $t_2=1$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: часть плоскости $x+z=1$, вырезанная плоскостями $y=x,\ y=2x,\ y=1,\ y=2$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2-y$ на фигуре, ограниченной плоскостями $z=2-2x-y,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Вариант 18

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{-y}^{3y} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = 4 - x^2,\ 2x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ:
поверхность $y = \sqrt{x^2 + z^2}, 0 \le y \le 2;\quad \gamma = x^2 + 3y^2 + z^2 + 5$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, заключённого между плоскостями $y + z = 0$, $z = 0$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: тело, ограниченное параболоидом $by = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = b$; в каждой точке плотность равна квадрату расстояния её до оси Oy.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x = e^t \cos t,\ \ y = e^t \sin t,\quad 0 \le t \le \ln \pi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: плоская область $\sqrt{3} \le x \le 2, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = z^2 + 1$ на 1-м витке кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

Вариант 19

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x = 6 - z^2 - y^2, x^2 = y^2 + z^2, x \geq 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело, ограниченное поверхностями $z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ \ z = 0$; $\gamma = xy^2 z^3$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная кривыми $\rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi, \quad \rho = 2\cos\varphi$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: часть поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $(x-a)^2 + y^2 = a^2$; поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: кривая $x = 2t$, $y = \ln t,\ \ z = t^2,\ \ 1 \leq t \leq 2$ при $\gamma = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y) = x - y$ на плоской области, ограниченной линиями $x^2 + y = 2$, $y = -x, y = x, y \geq 0$.

Вариант 20

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: дуги кривой $x = R\sin^2 t,\ y = R\sin t\cos t,\ z = R\cos t,\ \ 0 \le t \le \pi/2$; $\gamma = \sqrt{1 + x/R}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Oy дуги AB кривой $x = 4 - t^2/2$, $y = t^3/3$, где $A(x,0)$, $B(0,y)$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: плоская однородная фигура, ограниченная одной петлёй кривой $\rho = a\sin 2\varphi$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x = e^{-t}\cos t,\ \ y = e^{-t}\sin t,\ \ z = e^{-t},\ \ \ 0 \le t \le 2\pi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: части поверхности $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, $z \le 1$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = 2 - y$ на фигуре, ограниченной поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1$.

Вариант 21

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = x + y + 1, y^2 = x, x = 1, y = 0, z = 0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: дуга кривой $4y = x^4$ от $A(0;0)$ до $B(1;\ 0,25)$, $\gamma = xy$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная кривыми $y^2 = x - 2$, $y^2 = x,\ x = 4$ в плоскости XOY.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: плоская однородная фигура, ограниченная кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x = e^{-t}\sin t,\ y = e^{-t}\cos t,\ z = e^{-t}, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z) = 2 - y$ на фигуре, ограниченной поверхностями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 22

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{e^x} f(x,y)dy$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = a^2z^3, a>0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: поверхность $z=\sqrt{4-x^2}$, $0 \le y \le 5$, $\gamma = x^2y^3$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: поверхность, образованная вращением вокруг оси Ox кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: тело, ограниченное плоскостями $3x+2z=4$, $x=0$, $y=0$, $y=4$, $z=0$; плотность в каждой точке тела $\gamma = xyz$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $y = a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ от $O(0;0;0)$ до $A(x_0;y_0;z_0)$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: плоская область, ограниченная линиями $x^2+y^2=2y$, $y=\sqrt{3}x$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y)=3x+3$ на кривой $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$, $0 \le t \le 1$.

Вариант 23

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{1/e}^{1} dy \int\limits_{\ln y}^{-\ln y} f(x,y)dx$**.**

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: тело
$x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ \gamma = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)^3$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная кривыми $y = x^3,\ y = 2x,\ y = x$ в плоскости XOY.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная часть поверхности $z = 2 - \left(x^2 + y^2\right)/2$, расположенная над плоскостью XOY.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $y = 1 - \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \pi/6$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: кривая $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t, 0 \le t \le \ln 2$ при $\gamma = 1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y)$ на фигуре: $f(x,y) = x - y$ на области $x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x \ge 0$.

Вариант 24

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} dy \int\limits_{0}^{tgy} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=4ax,\ \ y^2=ax,$ $x=3a$, вне цилиндра.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: дуга $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\ \ \gamma=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: плоская область, ограниченная кривой $\left(x^2+y^2\right)^2=2y^3$ в плоскости XOY.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: равнобедренный прямоугольный треугольник; в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию её до гипотенузы.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ z=2\quad 0\le t\le 2\pi$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсечённая цилиндром $x^2+y^2=2ay$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2-y$ на фигуре, ограниченной поверхностями $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1$.

Вариант 25

ЗАДАЧА 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

ЗАДАЧА 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$x^2+y^2-z+2=0, x^2+y^2=1, z=0$.

ЗАДАЧА 3. Вычислить массу неоднородной фигуры с функцией плотности γ: плоская область, ограниченная линиями $xy=6, x+y=7$, $x^2+y^2 \ge 1, x^2+y^2 \le 4$; $\gamma = xy$.

ЗАДАЧА 4. Вычислить площадь заданной поверхности или ее части: часть параболоида $x^2+y^2=2az$, заключённого внутри цилиндра $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

ЗАДАЧА 5. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры: однородная дуга пространственной кривой $x^2+y^2+z^2=9$, $y=\sqrt{5}$ при $z \ge 0$.

ЗАДАЧА 6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$, $0<\rho<a$.

ЗАДАЧА 7. Найти момент инерции относительно начала координат: тело, ограниченное поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=0$, $y=x$, $x=1$, $y=0$ при $\gamma=1$.

ЗАДАЧА 8. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)$ на фигуре: $f(x,y,z)=2z+1$ на поверхности $x+z=1$, ограниченной плоскостями $y=2, x=0, y=0$.