

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

1) Пусть $L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{11} = a_{12} \right\}$ - линейное пространство. Указать любой базис пространства L и найти координаты вектора $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

2) Пусть L - пространство многочленов $P(x)$ степени не выше 3 с условиями $P(1) = 0, P'(1) = 0, P(1) + 2P'(1) = 0$. Указать размерность этого пространства.

3) Пусть L - пространство многочленов $P(x)$ степени не выше 2. Указать два различных базиса в этом пространстве и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и обратно.

4) Пусть $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ - линейное пространство. Указать три различных базиса в этом пространстве.

5) Пусть L - пространство квадратных матриц второго порядка с действительными коэффициентами. Пусть A - линейный оператор в этом пространстве, действующий по формуле:

$$A\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & 0 \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$
. Указать произвольный (не канонический) базис в этом пространстве и найти матрицу оператора A в этом базисе.

6) Пусть L - пространство многочленов $P(x)$ степени не выше 3. Пусть A - линейный оператор, действующий по формуле $A(P(x)) = P(x) + P'(x)$. Найти собственные числа и собственные векторы этого линейного оператора.

7) Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ - тензор типа (2,2) на некотором линейном пространстве L в некотором базисе. Выполнить симметрирование тензора по двум верхним.

8) Найти мощность множества $A = \{(0,1) \cup (3,4) \cup (9,10)\}$.

9) Пусть $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ - группа остатков по модулю 11 с операцией умножения. Указать любую подгруппу порядка два и указать факторгруппу по ней.

10) Привести кривую $9x^2 + y^2 + 18xy - 5x + 9y + 2 = 0$ к каноническому виду, определить тип и сделать чертеж.

11) Пусть L - пространство многочленов $P(x)$ степени не выше 2. В L выбран базис: $P_1(x) = 2x, P_2(x) = 1 - x, P_3(x) = x^2$. Некоторый оператор A в этом базисе имеет матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$
. Найти собственные векторы и собственные значения этого оператора.

12) Пусть L - пространство многочленов $P(x)$ степени не выше 2. В L выбран базис: $P_1(x) = 2x, P_2(x) = 1 - x, P_3(x) = x^2$. Некоторый оператор A в этом базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
. Найти явный вид линейного оператора.