

## Типовой расчёт № 2

### Дифференцирование функции одной переменной. Исследование функций с помощью производной

#### Образец выполнения типового расчёта № 2.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,02$ .

Решение:

Воспользуемся формулой:  $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . Для данной функции получим:  $\Delta f(x) = \frac{1}{(1+0,02)^2} - \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1,0404} - 1 = -\frac{0,0404}{1,0404} = -\frac{101}{2601}$ .

Ответ:  $-\frac{101}{2601}$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Решение:

$$y' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} \left( (e^x)' - (e^{-x})' \right) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2.2.  $y = \ln \sqrt{\cos x}$ .

Решение:

Используем правило дифференцирования сложной функции:

$$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x).$$

$$y' = \left( \ln \sqrt{\cos x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot (\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot \cos' x = \frac{\sin x}{2 \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Заметим, что этот результат можно было получить, представив функцию в виде  $\frac{1}{2} \ln \cos x$ .

2.3.  $y = e^{-x} \ln x$ .

Решение:

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения двух функций:

$$(uv)' = u'v + uv'. \text{ Получим } y' = (e^{-x} \ln x)' = -e^{-x} \cdot \ln x + \frac{e^{-x}}{x}.$$

2.4.  $y = \arccos \frac{1}{x^3}$ .

Решение:

Снова используем формулу производной сложной функции:  $(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$ .

$$\text{Получим: } y' = \left( \arctg \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot \left( \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{x^4}{x^4 + 1} \cdot \left( -\frac{2}{x^3} \right) = -\frac{2x}{x^4 + 1}.$$

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию  $2xy^2 - x^2y + x^2 + 2 = 0$ .

Решение:

Продифференцируем обе части данного уравнения по переменной  $x$ , учитывая при этом, что  $y$  является функцией аргумента  $x$ . Получим:

$(2xy^2 - x^2y + x^2 + 2)'_x = 2y^2 + 4xyy' - 2xy - x^2y' + 2x = 0$ . Из полученного равенства

выразим производной  $y'_x$ :  $4xyy' - x^2y' = 2xy - 2y^2 - 2x$ , откуда  $y' = \frac{2xy - 2y^2 - 2x}{4xy - x^2}$ .

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t^2, \\ y = \sin t - 3t. \end{cases}$$

Решение:

Используем правило дифференцирования функции, заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \text{ Получим: } y'_x = \frac{(2 \cos t^2)'}{(\sin t - 3t)'} = \frac{-4t \sin t^2}{\cos t - 3} = \frac{4t \sin t^2}{3 - \cos t}.$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[5]{31}$ .

Решение:

Используем приближённое равенство:  $\Delta f(x) \approx df(x) = f'(x)\Delta x$ , верное при малых значениях  $\Delta x$ . Откуда:  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ .

Преобразуем сначала исходное выражение:  $\sqrt[5]{31} = \sqrt[5]{32-1} = \sqrt[5]{32(1-\frac{1}{32})} = 2\sqrt[5]{1-\frac{1}{32}}$ .

Положим  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = -\frac{1}{32}$ . Производная равна:  $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ ,  $f'(1) = 1$ .

Окончательно имеем:  $\sqrt[5]{31} \approx 2(1 + 1 \cdot (-\frac{1}{32})) = \frac{31}{16} = 1\frac{15}{16}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

Решение:

Сначала находим первую производную:  $y' = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ .

Вычисляем вторую производную:  $y'' = \left(\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}\right)' = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 4x(1 - x^2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} =$   
 $= \frac{-2x(x^2 + 1) - 4x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-2x^3 + 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^3}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \sin 2x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ .

Решение:

Запишем уравнение касательной:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ . В нашем случае  $f(x_0) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $f'(x_0) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = -1$ . Подставляем в уравнение:  $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{\pi}{3}$ , откуда  $y = x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  - уравнение касательной.

Запишем уравнение нормали:  $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ . Подставив в это уравнение числовые данные:  $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -(x - \frac{\pi}{3})$ , откуда  $y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  - уравнение нормали.

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\sin x)^{\sin x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Решение:

Запишем общую формулу логарифмической производной:  $y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$ . В нашем случае:

$$y = (\sin x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{\sin x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = (\ln(\sin x)^{\sin x})' \Rightarrow y' = y \cdot (\sin x \ln \sin x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(\cos x \ln \sin x + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}) = (\sin x)^{\sin x} \cdot (\cos x \ln \sin x + \sin x \cdot \operatorname{ctg} x) = (\sin x)^{\sin x + 1} (\ln \sin x + \operatorname{ctg} x)$$

Задание 9. Исследовать функцию и построить ее график:  $y = \frac{\ln x}{x}$

Решение.

Функция определена и непрерывна в интервале  $(0; +\infty)$ . В граничной точке  $x=0$  области определения функция имеет бесконечный разрыв, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ .

Так как в точке  $x=0$  функция имеет бесконечный разрыв, то прямая  $x=0$  является вертикальной асимптотой. Найдем уравнение наклонной асимптоты  $y = kx + b$  (если она существует).

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0;$$

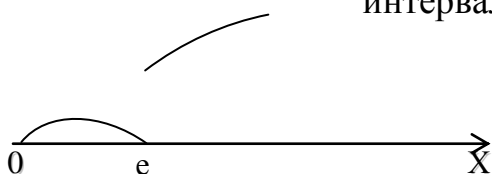
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(При нахождении пределов воспользовались правилом Лопиталья).

Итак,  $k = b = 0$  и уравнение асимптоты  $y = 0$ . Таким образом, график имеет в качестве асимптот оси координат.

Найдем производную функции и критические точки:

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . Стационарная критическая точка:  $x = e$ . Исследуем знак производной на интервалах  $(0; e)$  и  $(e; \infty)$ .



Составим таблицу:

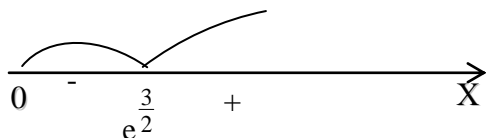
x	(0;e)	e	(e;+∞)
y'	+	0	-
y	возрастает	max	убывает

Экстремум функции:  $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0,37$ .

Найдем вторую производную и значения x, при которых график может иметь точку перегиба:

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}, \quad y'' = 0 \text{ при } x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Определим знак второй производной в интервалах  $(0; e^{\frac{3}{2}})$  и  $(e^{\frac{3}{2}}; +\infty)$ :

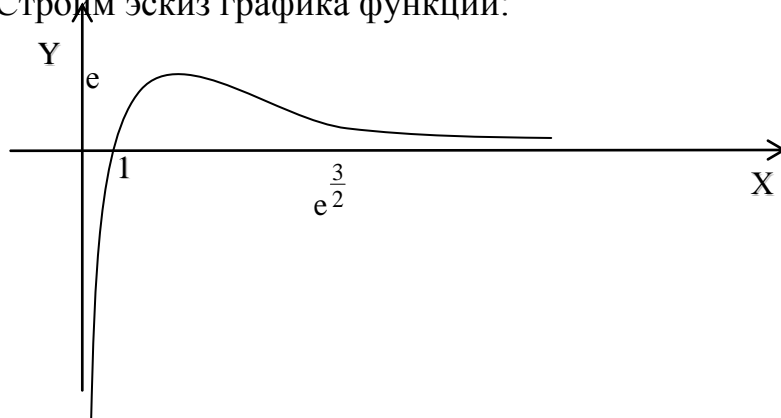


Составим таблицу:

x	$(0; e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4,48$	$(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$
y''	-	0	+
график	выпуклый	точка перегиба	вогнутый

$$y(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{(2e^{\frac{3}{2}})} \approx 0,33$$

График пересекает ось абсцисс в точке (1;0). Точек пересечения с осью ординат нет. Строим эскиз графика функции:



Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5 \text{ на отрезке } [1; 3].$$

Решение:

Найдём область определения функции:  $D(f) = R$ . Далее, продифференцируем

функцию:  $y' = (\frac{1}{3}x^3 - 4x + 5)' = x^2 - 4$ . Найдём критические точки:

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ . Одна из них,  $x = 2$ , принадлежит рассматриваемому промежутку. Определим значение функции в границах отрезка и в этой точке:

$y(0) = 5$ ;  $y(2) = -\frac{1}{3}$ ;  $y(3) = 2$ . Таким образом,  $\min_{[0;3]} y = -\frac{1}{3}$ ;  $\max_{[0;3]} y = 5$ .

## Варианты заданий

### Вариант № 1.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^2$  в точке  $x_0 = 0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,02$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x}{e^x - 2}$ . 2.2.  $y = \cos \sqrt{\sin x}$ . 2.3.  $y = x^2 \ln x$ . 2.4.  $y = \arccos \frac{1}{x^3}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию  $xy^3 - 4xy + x^2 + 2 = 0$ .

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t - 3t^2. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sin 46^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \cos 3x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = x^{\sin x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = x^3 - 3x^2$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{x^2}$  на отрезке  $[-3; 3]$ .

Вариант № 2.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^3$  в точке  $x_0 = 0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,02$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - e^{-x}}$ . 2.2.  $y = \cos \sqrt{x^3}$ . 2.3.  $y = x^2 \ln(x + 4)$ . 2.4.  $y = \arcsin \frac{1}{x^3}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$x^2 y^3 - x^2 y + x^2 + 1 = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 6t, \\ y = 2t - 3t^3. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sin 44^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \cos 5x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\cos x)^{\sin x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = 3x^2 - 2x^3$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  на отрезке  $[-5; 5]$ .

Вариант № 3.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^4$  в точке  $x_0 = 0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,02$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ . 2.2.  $y = \cos \sqrt[3]{x}$ . 2.3.  $y = x^3 \ln(x^2 + 4x)$ . 2.4.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^3}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$x^2 y^3 - x^2 y - x^2 + y = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^2 + t + 3, \\ y = t^2 - 4t^3. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 44^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \sin \frac{1}{2}x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\cos x)^x$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = x^3 - 2x^2 + x$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  на отрезке  $[-1; 1]$ .



Вариант № 4.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^4$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1}$ . 2.2.  $y = \sin \sqrt[3]{x}$ . 2.3.  $y = x^3 \cos(x^2 + 1)$ . 2.4.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$3x^2y^2 - x^2y - 3x + y = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 5t, \\ y = 3t^2 - 4t^4 + 1. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 61^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \sin \frac{1}{4}x$  в точке  $x_0 = \pi$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\sin x)^{\cos x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = (x-2)^2(x+3)$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  на отрезке  $[-2; 2]$ .

Вариант № 5.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^3$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1}$ . 2.2.  $y = \ln(\cos x)$ . 2.3.  $y = x^2 \sin x^2$ . 2.4.  $y = \arccos \sqrt{x}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$3x^3y^2 + 2xy - 3x + y - 4 = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^3 + t^2, \\ y = 3t^4 - t^3. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 89^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x-1}{x^2}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \operatorname{tg} \frac{1}{4}x$  в точке  $x_0 = \pi$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\sin x)^{\ln x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = (x-1)^2(x+2)^2$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  на отрезке  $\left[\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right]$ .

Вариант № 6.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^2 e^x$ . 2.2.  $y = \sqrt{\cos x}$ . 2.3.  $y = \frac{x-3}{x^3}$ . 2.4.  $y = e^{-\sqrt{x}}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$x^3 y + 3xy^2 - 3x^2 + y = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2 \cos 2t, \\ y = t \sin 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[5]{34}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = 3 \sin \frac{x}{4}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^3 - x$  в точке  $x_0 = 2$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = x^{x^2}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = \frac{x+2}{x^2+2x+2}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \cos 2x$  на отрезке  $\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Вариант № 7.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = xe^{3x}$ . 2.2.  $y = \sqrt{\sin x}$ . 2.3.  $y = \frac{x-1}{x^3+1}$ . 2.4.  $y = 2^{-\sqrt{x}}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$3x^3y + 3xy^2 - 3x^2 + y^2 - xy = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t \cos t, \\ y = t^2 \sin t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[5]{240}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = -4 \cos \frac{x}{4}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 - 3x + 2$  в точке  $x_0 = 2$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = x^{x^3}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = \frac{x}{x^2 + 2}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \sin 2x$  на отрезке  $\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Вариант № 8.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^2 e^{3x}$ . 2.2.  $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ . 2.3.  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ . 2.4.  $y = 2^{\frac{1}{x}}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$-x^3 y^2 + 6xy^2 + 3x^2 - xy = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t - \cos t, \\ y = t^2 \sin 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[3]{66}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{3}{16} \operatorname{tg} 4x$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 + 3x + 2$  в точке  $x_0 = 2$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = x^{5x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = \frac{3}{2x^2+1}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Вариант № 9.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,1$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^3 e^{-x}$ . 2.2.  $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$ . 2.3.  $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$ . 2.4.  $y = 2^{\frac{1}{x^2}}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:  
 $-2x^2 y^3 + xy^2 - 3x^2 - 6xy = 0$ .

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:  
$$\begin{cases} x = t + \cos 2t, \\ y = t^2 - \sin 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[3]{26}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = -\frac{5}{16} \operatorname{ctg} 4x$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 + 5x + 6$  в точке  $x_0 = -1$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (3x)^x$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = 2x^2 - \frac{1}{x}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$  на отрезке  $\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Вариант № 10.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  в точке  $x_0 = 2$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,1$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^2 e^{2-x}$ . 2.2.  $y = \sqrt[3]{\cos x}$ . 2.3.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ . 2.4.  $y = 2^{(1-x^2)}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$4xy^3 + 2xy^2 + x^2 - 6xy + x = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = t + 2 \sin 2t, \\ y = 2t - t \cos 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[4]{15}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \ln(\sin x)$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 - 5x + 6$  в точке  $x_0 = -1$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (3x)^{2x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = x^2 + \frac{8}{x}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \sin \frac{x}{2}$  на отрезке  $-\left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Вариант № 11.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^2$  в точке  $x_0 = 0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,02$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - e^{-x}}$ . 2.2.  $y = \cos \sqrt{x^3}$ . 2.3.  $y = x^2 \ln(x + 4)$ . 2.4.  $y = \arcsin \frac{1}{x^3}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию  $xy^3 - 4xy + x^2 + 2 = 0$ .

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 6t, \\ y = 2t - 3t^3. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sin 46^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \cos 3x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\cos x)^{\sin x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = x^3 - 3x^2$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  на отрезке  $[-5; 5]$ .



## Вариант № 12.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^4$  в точке  $x_0 = 0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,02$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1}$ . 2.2.  $y = \sin \sqrt[3]{x}$ . 2.3.  $y = x^3 \cos(x^2 + 1)$ . 2.4.  $y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$x^2 y^3 - x^2 y - x^2 + y = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 5t, \\ y = 3t^2 - 4t^4 + 1. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 44^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \sin \frac{1}{2}x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (\sin x)^{\cos x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = x^3 - 2x^2 + x$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  на отрезке  $[-2; 2]$ .

### Вариант № 13.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = x^3$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^2 e^x$ . 2.2.  $y = \sqrt{\cos x}$ . 2.3.  $y = \frac{x-3}{x^3}$ . 2.4.  $y = e^{-\sqrt{x}}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$3x^3 y^2 + 2xy - 3x + y - 4 = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2 \cos 2t, \\ y = t \sin 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 89^\circ$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = 3 \sin \frac{x}{4}$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \operatorname{tg} \frac{1}{4} x$  в точке  $x_0 = \pi$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = x^{x^2}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = (x-1)^2(x+2)^2$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \cos 2x$  на отрезке  $\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Вариант № 14.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,01$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^2 e^{3x}$ . 2.2.  $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ . 2.3.  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ . 2.4.  $y = 2^{\frac{1}{x}}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:

$$3x^3 y + 3xy^2 - 3x^2 + y^2 - xy = 0.$$

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t - \cos t, \\ y = t^2 \sin 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[5]{240}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \frac{3}{16} \operatorname{tg} 4x$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 - 3x + 2$  в точке  $x_0 = 2$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = x^{5x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = \frac{x}{x^2+2}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Вариант № 15.

Задание 1. Вычислить приращение функции  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  в точке  $x_0 = 1$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = 0,1$ .

Задание 2. Найти производные функций:

2.1.  $y = x^2 e^{2-x}$ . 2.2.  $y = \sqrt[3]{\cos x}$ . 2.3.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ . 2.4.  $y = 2^{(1-x^2)}$ .

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию:  
 $-2x^2 y^3 + xy^2 - 3x^2 - 6xy = 0$ .

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:  
$$\begin{cases} x = t + 2 \sin 2t, \\ y = 2t - t \cos 2t. \end{cases}$$

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[3]{26}$ .

Задание 6. Найти вторую производную функции  $y = \ln(\sin x)$ .

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 + 5x + 6$  в точке  $x_0 = -1$ .

Задание 8. Найти производную функции  $y = (3x)^{2x}$  с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 9. Исследовать функцию  $y = 2x^2 - \frac{1}{x}$  и построить схематически её график.

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \sin \frac{x}{2}$  на отрезке  $-\left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .