

Типовой расчёт № 1

Пределы числовых последовательностей и функций.

Образец выполнения типового расчёта № 1.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $(a_n): \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{2n}; \dots$

Решение:

Данную последовательность можно представить как произведение ограниченной последовательности $(-1)^{n+1}$, предел которой не определён, и сходящейся последовательности $\frac{1}{2n}$, предел которой равен нулю. Согласно одному из свойств сходящихся последовательностей, произведение ограниченной и сходящейся последовательности есть также сходящаяся последовательность, предел которой равен пределу последней.

$$\text{Тогда: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

1.2. $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{3n - 1}.$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{3n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sqrt{n^2 + 1}}{\frac{1}{n} (3n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1 + 0}}{3 - 0} = \frac{1}{3}.$$

1.3. $a_n = n \cos n^2.$

Решение:

Как и в первом пункте данного задания, представим данную последовательность в виде произведения двух последовательностей: $a_n = b_n \cdot c_n$, где $b_n = n, c_n = \cos n^2$. Очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Последовательность c_n в силу свойств косинуса является ограниченной: $-1 \leq c_n \leq 1$. Таким образом, члены последовательности a_n при $n \rightarrow \infty$ будут принимать как неограниченно большие, так и неограниченно малые значения. Следовательно, данная последовательность является расходящейся и предел её не определён.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2}.$

Решение:

В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия используем следующее известное свойство.

Пусть дана дробно-рациональная функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – некоторые

многочлены. Тогда:

1. Если степень многочлена $P(x)$ больше степени многочлена $Q(x)$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
2. Если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
3. Если степень многочлена $P(x)$ равна степени многочлена $Q(x)$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{p}{q}$, где

p, q – числовые коэффициенты при наивысших степенях x в данных многочленах.

В данном случае степени числителя и знаменателя равны двум, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 8x}{3x^2 - 2x^3 + 3}.$$

Решение:

В данном случае снова имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия используем то же известное свойство, что и в предыдущем случае. Степень числителя равна двум,

а степень знаменателя – трём. Поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 8x}{3x^2 - 2x^3 + 3} = 0$.

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x - 14}.$$

Решение:

В данном случае снова имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, преобразуем данную функцию, предварительно разложив на множители числитель и знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x - 14} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+7} = \frac{4}{9}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}.$$

Решение:

В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{1}{\infty - \infty}$. Чтобы раскрыть её, домножим данную дробь на дробь, сопряжённую её знаменателю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{-2} = \frac{\infty}{-2} = -\infty.$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}.$$

Решение:

В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, введём подстановку $t^6 = x$. Заметим, что $t \rightarrow 0$, при $x \rightarrow 0$. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t^3 - 4t^2}{t^4 - t^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t-4}{t^2-1} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin^2 5x}.$$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, приведём данную дробь к виду,

который допускал бы применение первого замечательного предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin^2 5x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{25} \cdot \frac{(5x)^2}{(\sin 5x)^2} \right) = \frac{1}{25} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \right)^2 = \frac{2}{25} \cdot 1^2 = \frac{2}{25}.$$

Замечание. При выполнении этого задания и заданий, подобных ему, можно использовать и другие способы решения – например, применить правило Лопиталья или эквивалентность бесконечно малых функций.

$$2.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, как и в предыдущем задании, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение первого замечательного предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Введём подстановку $t = \frac{\pi}{2} - x$. Заметим, что $t \rightarrow 0$,

при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^x.$$

Решение:

Имеем неопределённость вида 1^∞ . Чтобы раскрыть её, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение второго замечательного предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-4}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+2} \right)^x$. Далее, воспользовавшись равенствами

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+a} \right)^x = e \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k, \text{ получим: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+2} \right)^x = e^{-4}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x.$$

Решение:

Обратим внимание, что в данном случае $x \rightarrow 3$, поэтому нет необходимости использовать второй замечательный предел, поскольку нет никакой неопределённости, и предел может быть вычислен непосредственно.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}.$$

2.10. $\lim_{x \rightarrow 1-0} 5^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение:

Прежде всего, заметим, что если x стремится к единице слева, то $x-1$ будет принимать близкие к нулю отрицательные значения, и выражение $\frac{1}{x-1}$, очевидно, стремится к

$-\infty$. Тогда: $\lim_{x \rightarrow 1-0} 5^{\frac{1}{x-1}} = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{\infty}} = 0$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Решение:

Найдём область определения данной функции. $D(f) : (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$. Итак, имеем две точки разрыва: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Теперь определим, каков характер разрыва функции в каждой из этих точек.

Точка $x_1 = 1$ является точкой бесконечного разрыва (второго рода), так как:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-2}{0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-2}{-0} = +\infty.$$

Точка $x_2 = 3$ является точкой устранимого разрыва, так как:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-1} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Окончательный ответ: функция непрерывна при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$; точка $x_1 = 1$ является точкой бесконечного разрыва; точка $x_2 = 3$ является точкой устранимого разрыва и $f(3) = 1,5$.

Варианты заданий

Вариант № 1.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{n+1}{4n-3}$; 1.3. $a_n = \frac{n!}{\cos n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 2}{x^2 + 6x - 5}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x}{3x^3 - 5x + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x - 7}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt{x^2 - 4}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}$.
2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{5x}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Вариант № 2.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{n^2 + 1}{4n - 3}$; 1.3. $a_n = \frac{n^2}{\cos n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{6x^2 + x - 5}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 8}{3x^4 - 5x^2 + 7}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2}}{\sqrt{x + 2}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[6]{x}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg} 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 4x}{5x}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow 2+0} 5^{\frac{1}{x-2}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}.$$

Вариант № 3.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{n+1}{n^2-3}$; 1.3. $a_n = \frac{n}{\cos n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{4x^2 + x - 5}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x - 8}{3x^2 - 5x + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 6x - 7}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$.
2.6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sin 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+2} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow 3-0} 3^{\frac{1}{x-3}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3x - 10}.$$

Вариант № 4.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots; \frac{1}{3^{n-1}}; \dots$ 1.2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**; 1.3. $a_n = \frac{|\cos n|}{n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 2}{9x^2 + x - 2}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 5x - 11}{3x^3 - 5x + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt{9x^2 - 4}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[6]{x}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 6x}{3x}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}.$$

Вариант № 5.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

$$1.1. 2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \dots; \frac{2}{3^{n-1}}; \dots \quad 1.2. a_n = \frac{2-5n}{\sqrt{n^2-n}}; \quad 1.3. a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}.$$

Задание 2. Найти пределы функций:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4x^2-2}{9x^2+x-1}. \quad 2.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x-1}{3x^3-5x^2+1}. \quad 2.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}. \quad 2.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \sqrt{x^4-1}}{\sqrt{9x^3-4}}. \quad 2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^5}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}. \quad 2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}. \quad 2.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{x-\frac{\pi}{2}}. \quad 2.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x. \quad 2.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^5. \quad 2.10. \lim_{x \rightarrow -1+0} 4^{\frac{1}{x+1}}.$$

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 6}.$$

Вариант № 6.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

$$1.1. 2,1; 2,11; 2,111; \dots \quad 1.2. a_n = \frac{2^{n-1} - 5^{n-1}}{2^n + 5^n}; \quad 1.3. a_n = \ln \frac{1}{n}.$$

Задание 2. Найти пределы функций:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 2}{x + 7x^2 - 1}. \quad 2.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x^4 - 2}{x^3 - 5x^2 + 1}. \quad 2.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 4}. \quad 2.4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}). \quad 2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}. \quad 2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 5x}. \quad 2.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}. \quad 2.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-2x}. \quad 2.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x. \quad 2.10. \lim_{x \rightarrow -2+0} 4^{\frac{1}{x+2}}.$$

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}.$$

Вариант № 7.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. 1,2;1,22;1,222;.... 1.2. $a_n = \frac{4^{n-1} - 5^{n-1}}{4^n + 5^n}$; 1.3. $a_n = \ln \frac{1}{n^2}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 4x - 12}{x^4 + x - 1}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x^4 - 2}{2x^2 - 5x^4 + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 4x - 5}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$.

2.10. $\lim_{x \rightarrow -2+0} 4^{\frac{1}{x+2}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 4x + 3}.$$

Вариант № 8.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. 1,3;1,33;1,333;.... 1.2. $a_n = \frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n}$; 1.3. $a_n = n^2 \sin \pi n$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 - 4x^2 - 12}{x^4 + x^5 - 3x}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x^4 - 2}{2x^2 - 5x^3 + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x \right)$. 2.5.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^5} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[12]{x^5}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{5x^3}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{x-1}$.

2.10. $\lim_{x \rightarrow -3+0} 2^{\frac{1}{x+3}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Вариант № 9.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1,4;1,44;1,444; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{4^{n-1} + 7^{n-1}}{4^n + 7^n}$; 1.3. $a_n = n^3 \cos \pi n$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{3x^4 + x^2 - 3x}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 - 2}{x^2 - 5x^5 + 9}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. 2.5.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^5}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}x}$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+1}\right)^{x+2}$.

2.10. $\lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 7x + 10}.$$

Вариант № 10.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1,7;1,77;1,777; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{4^{n+1} + 7^{n+1}}{4^n + 7^n}$; 1.3. $a_n = n^2 \cos \frac{\pi n}{2}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 4x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 - 3}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 - 2}{x^2 - x^5 + 4}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x - 5}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$.

2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{4x^2}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$. 2.9.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x+2}$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow 3-0} 6^{\frac{1}{3-x}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 7x - 8}.$$

Вариант № 11.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{n^2 + 1}{4n - 3}$; 1.3. $a_n = \frac{n!}{\cos n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{6x^2 + x - 5}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x}{3x^3 - 5x + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt{x^2 - 4}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[6]{x}}$.
 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 4x}{5x}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}.$$

Вариант № 12.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots; \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{n^2 - 1}{7n - 3}$; 1.3. $a_n = \frac{n}{\cos n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 2}{9x^2 + x - 2}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x - 8}{3x^2 - 5x + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[6]{x}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sin 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 6x}{3x}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+2} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow 3-0} 3^{\frac{1}{x-3}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}.$$

Вариант № 13.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \dots; \frac{2}{3^{n-1}}; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{2^{n-1} - 5^{n-1}}{2^n + 5^n}$; 1.3. $a_n = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 2}{x + 7x^2 - 1}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x - 1}{3x^3 - 5x^2 + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 4}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{9x^3 - 4}}$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow -1+0} 4^{\frac{1}{x+1}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}.$$

Вариант № 14.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. $1; 2; 1,22; 1,222; \dots$ 1.2. $a_n = \frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n}$; 1.3. $a_n = \ln \frac{1}{n^2}$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 - 4x^2 - 12}{x^4 + x^5 - 3x}$. 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x^4 - 2}{2x^2 - 5x^4 + 1}$. 2.3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$. 2.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$. 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^5} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[12]{x^5}}$. 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 5x}$. 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{5x^3}$. 2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x$. 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{x-1}$. 2.10. $\lim_{x \rightarrow -2+0} 4^{\frac{1}{x+2}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Вариант № 15.

Задание 1. Найти пределы числовых последовательностей, или установить их расходимость:

1.1. 1,4;1,44;1,444;...; 1.2. $a_n = \frac{4^{n+1} + 7^{n+1}}{4^n + 7^n}$; 1.3. $a_n = n^3 \cos \pi n$.

Задание 2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{3x^4 + x^2 - 3x}$; 2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 - 2}{x^2 - x^5 + 4}$; 2.3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$; 2.4.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{(x-1)^2} \right)$; 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}}$; 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{4x^2}$; 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}$;
2.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-\frac{1}{3}x}$; 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+1} \right)^{x+2}$; 2.10. $\lim_{x \rightarrow 3-0} 6^{\frac{1}{3-x}}$.

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 7x - 8}.$$