В.В. Петрова
Н.Н. Петров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(часть II)

Министерство образования и науки Российской Федереации
Федеральное агентство РФ по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет»
Факультет «Прикладная математика»
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

В. В. ПЕТРОВА, Н. Н. ПЕТРОВ

Индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов по курсу «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» ЧАСТЬ II

Ижевск
Издательство ИжГТУ
2010

ЗАДАНИЕ 1

Найти область определения функции и изобразить ее на плоскости:

1. $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{x^2+y^2} + \sqrt{4-x-y}$
2. $f(x,y) = \arccos \frac{y}{x^2+y^2} + \ln(2-x-y)$
3. $f(x,y) = \sqrt{|x|-|y|} + \ln(y-e^x)$
4. $f(x,y) = \sqrt{x(x+y-1)} + \arcsin\ xy$
5. $f(x,y) = \sqrt{(x+y)(x-y+1)} + \sqrt{x^2+y^2-2x-2y}$
6. $f(x,y) = \sqrt{(x+2y-4)y} + \arcsin\sqrt{2-(x+y)}$
7. $f(x,y) = \arcsin\sqrt{3-(2x+y)} + \sqrt{(x-3y-6)x}$
8. $f(x,y) = \arccos\sqrt{4-(3x+y)} + \sqrt{2-xy}$
9. $f(x,y) = \sqrt{y+\frac{1}{x}} + \sqrt{ln(x^2+y^2-1)}$
10. $f(x,y) = \sqrt{y-\sin x} + \sqrt{\cos x - y}$
11. $f(x,y) = \sqrt{x^2y^2-4} + \sqrt{y^2-x^2-4}$
12. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2y^2} + \sqrt{y-x^2-4}$
13. $f(x,y) = \ln(x+y^2+x^2-1) + \sqrt{(x+y)(x-3)}$
14. $f(x,y) = \arcsin \frac{x+y}{x^2+2x+y^2} + \sqrt{y(2x-y-6)}$
15. $f(x,y) = \arccos \frac{x-y}{y^2+x^2-2y} + \sqrt{y(2x+y-3)}$
16. $f(x,y) = \sqrt{1-\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{x}{y}}$
17. $f(x,y) = \sqrt{4-\frac{8}{\pi}\arccos\frac{y}{x}}$
18. $f(x,y) = \sqrt{e^{-x}-y} + \sqrt{y(6x-y)}$
19. $f(x,y) = \sqrt{1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} + \sqrt{x-y}$
20. $f(x,y) = \sqrt{\arcsin(\sqrt{x}-y)}$
21. $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\frac{\pi}{4}}$
22. $f(x,y) = \sqrt{y\sin x} + \sqrt{y\cos x}$
23. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{4-xy}$
24. $f(x,y) = \sqrt{|x|-2|y|} + \arccos\frac{x}{y}$
25. $f(x,y) = \sqrt{y-\ln x} + \sqrt{\frac{y-x}{x}}$

ЗАДАНИЕ 2

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)$, если

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y}{x^2+y}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{xy+x-y}$,
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2y^2+x^2-y^2}$
5. $f(x,y) = \dfrac{xy}{xy+(x-y)^2}$,
6. $f(x,y) = \dfrac{x^2y-yx^2}{x^2+xy+y^2}$
7. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{x+y}$,
8. $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$
9. $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$,
10. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y}{x-y^3}$
11. $f(x,y) = \dfrac{x\sin y}{e^{xy}-1}$,
12. $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{1-\cos(x+y)}$
13. $f(x,y) = \dfrac{xy}{1-\cos(x+y)}$,
14. $f(x,y) = \dfrac{y}{1-\cos(x+y)}$
15. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{1-e^{xy}}$,
16. $f(x,y) = \dfrac{tg\ xy}{x+2y}$
17. $f(x,y) = (1+x+y)^{\frac{1}{|xy|}}$,
18. $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$
19. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2-y^3}$,
20. $f(x,y) = \dfrac{yx^3}{\sin x - y}$
21. $f(x,y) = \dfrac{\cos x - \cos y}{xy}$,
22. $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y^2}$
23. $f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 - \sin y^2}{x+y}$,
24. $f(x,y) = xy\cdot e^{-\frac{1}{|x-y|}}$

ЗАДАНИЕ 3

Используя понятие дифференциала функции, вычислить приближенно,

1.	$\operatorname{arctg}\dfrac{2,02}{1+0,98^2}$,	2.	$\arccos\dfrac{1,02}{1+(1,03)^2}$,	3.	$e^{\sqrt[3]{(0,02)^3+(1,97)^3}}$
4.	$(1,98)^3\cdot(2,03)^4$,	5.	$(0,98)^{2,02}$,	6.	$\sin\dfrac{0,02}{1+(0,06)^2}$
7.	$(0,03)^{21}+(0,97)^9$,	8.	$\sqrt{(0,97)^3+(0,02)^5}$,	9.	$(1,04)^{4,08}$
10.	$(0,98)^9\cdot e^{-0,01}$,	11.	$\cos 62^0\cdot\sin 5^0$,	12.	$\sin 0,02\cdot e^{0,07}$
13.	$\cos 0,09\cdot e^{-0,04}$,	14.	$\sin 0,08\cdot e^{0,03}$,	15.	$\cos 0,09\cdot e^{0,09}$
16.	$\sqrt[5]{1,03}\cdot e^{-0,98}$,	17.	$\sqrt[7]{1,09}\cdot e^{0,08}$,	18.	$\sqrt[3]{\sin 0,03}\cdot e^{0,02}$
19.	$\sqrt[5]{\cos 0,08}\cdot e^{-0,02}$,	20.	$\sqrt[7]{\sin 0,01}\cdot e^{-0,07}$,	21.	$\sqrt[5]{\cos 0,02}\cdot e^{0,05}$
22.	$\sqrt[3]{8,03}\cdot\cos 0,08$,	23.	$\sqrt[5]{32,05}\cdot\sin 0,02$,	24.	$\sqrt[3]{\sin 0,03}\cdot e^{0,01}$

ЗАДАНИЕ 4

Исследовать функцию на непрерывность, найти все точки разрыва функции, указать точки устранимого разрыва:

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,
2. $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$
3. $f(x,y)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{y^2}}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$,
4. $f(x,y)=\begin{cases}tg\frac{x^2-xy}{2xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$
5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy^2}-1}{x^2y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$,
6. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y(x^2+1)}, & y\neq 0\\ \frac{1}{3}, & y=0\end{cases}$
7. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^x-e^y}{x-y}, & x-y\neq 0\\ 0, & x-y=0\end{cases}$,
8. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}, & x-y\neq 0\\ 0, & x-y=0\end{cases}$
9. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{xy}, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$,
10. $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$

11. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin^2 xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 1, & x^2+y^2=0 \end{cases}$, 12. $f(x,y)=x\sin\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

13. $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x-y|}}, & x-y\neq 0 \\ x^2-5x, & x-y=0 \end{cases}$ 14. $f(x,y)=\begin{cases} y\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$

15. $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{xy}\cos\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$, 16. $f(x,y)=sign(1-|x|-|y|)$

17. $f(x,y)=\begin{cases} 2xy\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{xy}, & xy\neq 0 \\ \pi, & xy=0 \end{cases}$ 18. $f(x,y)=xy\cdot\ln(1+x+y)$

19. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$ 20. $f(x,y)=x^2y\cdot\ln(1+x^2y)$

21. $f(x,y)=\begin{cases} arccos\frac{x^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

22. $f(x,y)=\begin{cases} 2arctg\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ \pi, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

23. $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2-1)\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}, & x^2+y^2\neq 1 \\ 0, & x^2+y^2=1 \end{cases}$

24. $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

25. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{x+y}-1)(x+y)}{x+y-1}, & x+y\neq 1 \\ 0,5, & x+y=1 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 5

Существуют ли у функции f частные производные в нуле, если существуют, то вычислить их и исследовать данную функцию на дифференцируемость в нуле:

1. $f(x,y) = y \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$
2. $f(x,y) = y + \cos\sqrt[3]{x^3+y^3}$
3. $f(x,y) = \arcsin(xy + \sqrt[3]{x^2+y^2})$
4. $f(x,y) = \arcsin\sqrt[3]{0,5+xy}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\ln^2|y|}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
6. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$
7. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^3}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
8. $f(x,y) = \sqrt[5]{x^6+y^5}$
9. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
10. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$
11. $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
12. $f(x,y) = \sqrt[5]{|x|^7|y|^3}$,
13. $f(x,y) = \begin{cases} y\arcsin\sqrt{\frac{|x|}{|y|}}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
14. $f(x,y) = e^{-\sqrt[3]{|xy|}}$
15. $f(x,y) = \begin{cases} x\arccos\sqrt{\frac{|y|}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
16. $f(x,y) = e^{-\sqrt[3]{|x-y|}}$
17. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arcsin\sqrt{|xy|}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
18. $f(x,y) = e^{\sqrt[3]{|x+y|}}$
19. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{x^2|y|}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
20. $f(x,y) = ye^{-\sqrt[5]{x}}$
21. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
22. $f(x,y) = xy\sqrt[3]{x+y}$
23. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos xy-1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
24. $f(x,y) = y\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^3}}$

ЗАДАНИЕ 6

Вычислить $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, если

1. $f = 2u + v,\ x = u + \ln v,\ y = v - \ln x$
2. $f = \sin v,\ x = \cos u \cdot\ \cos v,\ y = \sin u \cdot \cos v$
3. $f = u^3 + v^3,\ x = u + v,\ y = u^2 + v^2$
4. $f = u^2 + v^2,\ x = u + v,\ y = u^3 + v^3$
5. $f = \sin u + \sin v,\ x = \cos u,\ y = \cos v$
6. $f = \ln u + \ln v,\ x = u + v,\ y = u^2 + v^2$
7. $f = u^2 + v^2,\ x = u \cos v,\ y = v \cos u$
8. $f = uv,\ x = u \cos v,\ y = v \cos u$
9. $f = \cos u + \cos v,\ x = e^u,\ y = u^2 + v^2$
10. $f = u^5 + v^5,\ x = u^3 - v^3,\ y = 2u + 5v$
11. $f = uv,\ x = e^u + u \sin v,\ y = e^u - v \sin u$
12. $f = u + v,\ x = e^u \sin v,\ y = e^u \cos v$
13. $f = e^u + e^v,\ x = u \sin v,\ y = v \sin u$
14. $f = uv,\ x = 0,5(u^2 + v^2),\ y = 0,5(u^2 - v^2)$
15. $f = \sin(u - v),\ x = \sin u + \cos v,\ y = \cos u + \sin v$
16. $f = (u - v)^2,\ x = v \cos u - u \cos u,\ y = v \sin u - u \sin u$
17. $f = (u - v)^2,\ x = v \sin u + u \sin v,\ y = u \cos v + v \cos u$
18. $f = uv,\ x = e^u \cos v,\ y = e^v \sin u$
19. $f = u^2 - v^2,\ x = \operatorname{tg} u, y = \operatorname{tg} uv$
20. $f = u + 2v,\ x = u \ln v,\ y = v \ln u$
21. $f = u^2 + v^2,\ x = u \ln v,\ y = v \ln u$
22. $f = u^2 + v^2,\ x = e^u \ln v,\ y = e^v \ln u$
23. $f = uv,\ x = \sin u \cdot \ln v,\ y = \cos v \cdot \ln u$
24. $f = u + v, x = \ln(u^2 + v^2),\ y = \sin u + \cos v$
25. $f = u^2 + v^2,\ x = \ln(u^2 + v^2),\ y = e^u \cos v$

ЗАДАНИЕ 7

Пусть $f \in C^1(R^1)$. Вычислить $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$.

1. $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{xy} (x - yt) f(t) dt,$
2. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{x^2 y} (x + ty) f(t) dt$
3. $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{e^{-xy}} (x + yt) f(t) dt,$
4. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{e^{xy}} (xy^2 + ty) f(t) dt$
5. $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{xy} e^{xyt} f(t) dt,$
6. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{e^{x}} \sin(xyt) f(t) dt$
7. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{xy} e^{-x+yt} f(t) dt,$
8. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{e^{-x}} \sin(xyt) f(t) dt$
9. $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{x+2y} e^{-yt} f(t) dt,$
10. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{ye^{x}} \sin(xt) f(t) dt$
11. $F(x,y) = \int\limits_{xe^{y}}^{xy} e^{xy^2 t} f(t) dt,$
12. $F(x,y) = \int\limits_{xe^{y}}^{e^{x}} (x + yt) f(t) dt$
13. $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{xy} (x^2 + yt^2) f(t) dt,$
14. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{e^{x}} \sin^2(xt) f(t) dt$
15. $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{y/x} e^{xyt} f(t) dt,$
16. $F(x,y) = \int\limits_{xy}^{x/y} xe^{yt} f(t) dt$

17. $F(x,y)=\int\limits_{x/y}^{y/x} e^{yt+x}f(t)dt,$ 18. $F(x,y)=\int\limits_{xy}^{x/y}(xt+y^2t)f(t)dt$

19. $F(x,y)=\int\limits_{x/y}^{y/x}\frac{f(t)}{1+x^2t^2}dt,$ 20. $F(x,y)=\int\limits_{xy}^{e^x}\frac{f(t)}{1+y^2t^2}dt$

21. $F(x,y)=\int\limits_{x/y}^{xy} e^{-xyt}f(t)dt,$ 22. $F(x,y)=\int\limits_{xy}^{e^x}\ln(1+x^2y^2t^2)f(t)dt$

23. $F(x,y)=\int\limits_{x/y}^{xy}\frac{f(t)}{1+x^2t^2}dt,$ 24. $F(x,y)=\int\limits_{xy}^{e^x}\frac{f(t)e^{xt}}{1+x^2t^2}dt$

ЗАДАНИЕ 8

Вводя новые переменные, преобразовать следующие уравнения:

1. $y^2(x)+(x^2-xy(x))y'(x)=0,\ y=tx,\ y=y(t)$
2. $y'(x)+2xy(x)=2x^3y^3(x),\ u=\dfrac{1}{y^2},\ u=u(x)$
3. $(xy(x)+x^2y^3(x))^{-1}y'(x)=1,\ u=\dfrac{1}{y^2},\ u=u(x)$
4. $xy''(x)-y'(x)+xy(x)=0,\ t=\dfrac{x^2}{4},\ y=y(t)$
5. $x^2y''(x)+3xy'(x)+y(x)=0,\ x=e^t,\ y=y(t)$
6. $x^3y'''(x)+2x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=0,\ t=\ln x,\ y=y(t)$
7. $xy''(x)+2y'(x)-xy(x)=e^x,\ y=\dfrac{u}{x},\ u=u(x)$
8. $x^4y''(x)-y(x)=0,\ y=\dfrac{u}{t},\ x=\dfrac{1}{t},\ u=u(t)$
9. $y''(x)+\dfrac{2}{x}y'(x)-y(x)=2,\ y=\dfrac{u}{x},\ u=u(x)$
10. $x^4y''(x)+2x^3y'(x)+y(x)=0,\ x=\dfrac{1}{t},\ y=u,\ u=u(t)$

11. $x^2y''(x)4xy'(x)+y(x)=0,\ x=e^t,\ y=u,\ u=u(t)$

12. $(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+y(x)=0,\ x=\sin t,\ y=u,\ u=u(t)$

13. $yy'''(x)-3y'^2(x)=1,\ y=\dfrac{1}{u},\ u=u(x)$

14. $y''(x)+\dfrac{2x}{1+x^2}y'(x)+\dfrac{y(x)}{(1+x^2)}=0,\ x=\operatorname{tg}t,\ y=u,\ u=u(t)$

15. $x^4y''(x)+2x^3y'(x)-y(x)=0,\ x=\dfrac{1}{t},\ y=u, u=u(t)$

16. $x^4y''(x)+2x^2y'(x)-y(x)=0,\ x=\dfrac{1}{t^2},\ y=u,\ u=u(t)$

17. $x^4y''(x)+2x^2y'(x)-y(x)=0,\ x=\ln t,\ y=u,\ u=u(t)$

18. $x^4y''(x)+2x^2y'(x)-y(x)=0,\ x=e^t,\ y=u,\ u=u(t)$

19. $x^4y''(x)+2x^2y'(x)-y(x)=0,\ x=\operatorname{tg}t,\ y=u,\ u=u(t)$

20. $x^2y''(x)4xy'(x)+y(x)=0,\ x=\ln t,\ y=u,\ u=u(t)$

21. $x^2y''(x)4xy'(x)+y(x)=0,\ x=t^3,\ y=u,\ u=u(t)$

22. $x^2y''(x)4xy'(x)+y(x)=0,\ x=\dfrac{1}{t^2},\ y=u,\ u=u(t)$

Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразовать уравнения:

23. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ v=ux$

24. $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ v=(x-y)u$

25. $\dfrac{\partial u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=-u,\ u=ve^{-x-y}$

ЗАДАНИЕ 9

Приняв u,v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения

1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=zx,\quad x=u\cos v,\ y=u\sin v$

2. $(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y},\quad x=u\cos v,\ y=\sin v$

3. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{tg}(x^2+y^2),\quad x=u\cos v,\ y=u\sin v$

4. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2,\quad u=x,\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$

5. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x,\ v=x^2+y^2$

6. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2,\quad u=xy,\ v=\dfrac{y}{x}$

7. $2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^x\dfrac{\partial z}{\partial y}=4ye^x,\quad u=y^2+e^x,\ v=y^2-e^x$

8. $y\dfrac{\partial z}{\partial y}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy=0,\quad u=\dfrac{y}{x},\ v=yx^2$

9. $2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+2y=0,\quad y=v,\ x=\frac{4+v^2}{2}$

10. $y\dfrac{\partial z}{\partial y}+4\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{xy},\quad x=v^2,\ y=(u-v)^2$

11. $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x,\ v=\dfrac{y+z}{x+z}$

12. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,\quad u=x-y,\ v=\dfrac{y}{x}$

13. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=ye^{x^2+y^2},\quad u=x^2+v^2,\ v=x$

14. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1,\quad x=uv,\ y=0,5(u^2-v^2)$

15. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\ln(x+y),\quad u=\ln(x+y),\ v=y$

16. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1,\quad x=u\cos v,\ y=u\sin v$

17. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy,\quad u=\ln x,\ v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

18. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=\ln(\sqrt{x^2+y^2}),\ v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

19. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{z},\quad u=2x-z^2,\ v=-\dfrac{y}{z}$

20. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2,\quad u=x,\ v=\dfrac{1}{y}$

21. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\ln xy,\quad u=x-y,\ v=\operatorname{arctg} xy$

22. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=xy,\ v=\dfrac{y}{x}$

23. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x+y,\ v=x^2+y^2$

24. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad x=e^u,\ y=e^v$

25. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad x=\sqrt{u^2+v^2},\ y=x+y$

ЗАДАНИЕ 10

Выписать члены до второго порядка включительно формулы Тейлора для функции $f(x,y)$ в окрестности заданной точки:

1. $\dfrac{1}{x-y},\quad (2,1),$
2. $\sqrt{x+y},\quad (2,2)$
3. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\quad (1,1),$
4. $\sin x\cdot\cos y,\quad (x_0,y_0)$
5. $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1+y},\quad (0,0)$
6. $\sin x\cdot\ln y,\quad (0,e)$
7. $\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy},\quad (0,0),$
8. $x^y,\quad (e,2)$
9. $\arccos\dfrac{x}{y},\quad (1,2),$
10. $e^{xy-1},\quad (1,1)$
11. $\ln(1+x^2-y^2),\quad (1,1),$
12. $\sqrt[3]{2-xy},\quad (1,1)$
13. $\dfrac{1}{1+xy},\quad (1,1),$
14. $\dfrac{1}{1-xy},\quad (0,1)$

15. $\ln(1+\dfrac{x}{y})$, $(1,1)$, 16. $\dfrac{x^2-y}{x+y^2}$, $(0,1)$

17. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, $(1,1)$, 18. $\sqrt{4-x-y}$, $(1,2)$

19. $\ln(y+\sqrt{1+x})$, $(0,0)$, 20. $e^{\frac{x}{y}}$, $(0,1)$

21. $\ln(xe^y+ye^x)$, $(0,1)$, 22. $\sqrt[3]{8-x-y}$, $(0,0)$

23. $ye^{\sin x}$, $(0,1)$, 24. $x\cos(xy)$, $(1,0)$

ЗАДАНИЕ 11

Найти точки локального экстремума функции:

1. $e^{2x}(x+y^2+2y)$,
2. $xyz(2-x-y-z)$
3. $x^2y^3(6-x-y)$,
4. $xy^2(12-x-y)$
5. $3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x$,
6. $e^{x^2-y}(5-2x+y)$
7. $81\Big(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\Big)-(x^2+xy+y^2)$,
8. $\dfrac{x+y}{xy}-xy$
9. $e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$,
10. $x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$
11. $xy^2(1-2x-3y)$,
12. $(2x^2-y^2)e^{x^2-y^2}$
13. $x^2+xy+y^2+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{y}$,
14. $2x^3+5x^2+y^2-xy^2$
15. $x^2y^3(1-2x-3y)$,
16. $x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}$
17. $x^2-y^2+2e^{-x^2}$,
18. $x^3-(y-1)^3-3xy^2$
19. $xy(3-x-y)$,
20. $x^2+y^2-32\ln(xy)$
21. $xy\sqrt{12-4x^2-y^2}$,
22. $y+\dfrac{x}{y}+\dfrac{8}{x}$
23. $xy(12-x-y)$,
24. $108\ln x-xy^2+\dfrac{1}{3}y^3$

ЗАДАНИЕ 12

Найти условные экстремумы функции:

1. $2x^2+3y^2+4z^2, \quad x+y+z=13,$
2. $xyz, \quad z^2+y^2+z^2=3$
3. $xy+2xz+2yz, \quad xyz=108,$
4. $x-y+2z, \quad x^2+y^2+2z^2=16$
5. $x-2y+2z, \quad x^2+y^2+z^2=9,$
6. $x+y+z, \quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}=1$
7. $2x^2+12xy+y^2, \quad x^2+4y^2=25,$
8. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}, \quad \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{8}$
9. $4x^2+9y^2+16z^2, \ x+y+z=1,$
10. $xy^2z^3, \quad x+y+z=12$
11. $x+y+z, \quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1,$
12. $xyz, \quad \dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$
13. $2x^2+6xy-3y^3, \quad x^2+y^2=1,$
14. $2x+y-z, \ x^2+y^2+2z^2=22$
15. $xy, \quad x^3+y^3-xy=0,$
16. $xyz, \quad x^2+y^2+z^2=16$
17. $4x+3y, \quad x^2+y^2=25,$
18. $x^2+y^2+z^2, \ \dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$
19. $xy+yz+zx, \ x^2+y^2+z^2=1,$
20. $2x+3y+4z, \ x^2+y^2+z^2=4$
21. $x^2+y^2+z^2, \ 2x+3y+4z=22,$
22. $xyz, \ xy+yz+zx=8$
23. $xyz, \ x+y+z=5,$
24. $5x+7y+3z, \ x^2+y^2+z^2=9$

ЗАДАНИЕ 13

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве:

1. $xy-x^2y-0{,}5xy^2, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \ 0\leqslant y\leqslant 2$
2. $x^2+3y^2-x+18y-4, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \ 0\leqslant y\leqslant 2$
3. $x^3+3y^2-3xy, \quad 0\leqslant x\leqslant 2, \ 0\leqslant y\leqslant 1$
4. $x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2, \quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2$
5. $\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x+y), \quad 0\leqslant x\leqslant \pi, \ 0\leqslant y\leqslant \pi$
6. $xy+yz+zx, \quad x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$

7. $x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$

8. $2\sin x + 2\sin y + \sin(x + y), \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

9. $x^2 + y^2 - xy - x - y, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3$

10. $(x + y)e^{xy}, \quad -2 \leqslant x + y \leqslant 1$

11. $y^4 - x^4, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

12. $(y^2 - x^2)e^{1-x^2+y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant 4$

13. $x + 3y, \quad x + y \leqslant 6,\ x + 4y \geqslant 4,\ y \leqslant 2$

14. $3 + 2xy, \quad 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$

15. $xy(6 - x - y), \quad x + y \leqslant 12,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

16. $x + |x - y|, \quad |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 2$

17. $x^2 + y^2 + z^2, \quad x^4 + y^4 + z^4 \leqslant 1$

18. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2, \quad y \geqslant x^2,\ y \leqslant 4$

19. $e^{x-y} - x - y, \quad x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

20. $2x^2 + 3y^2, \quad x + y \leqslant 8,\ x \geqslant 0,\ -x + 2y \leqslant 4$

21. $x - y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

22. $x + y + e^{x-y}, \quad x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

23. $x^2 - 2y^2, \quad x + y \leqslant 1,\ y - x \leqslant 1,\ y \geqslant 0$

24. $x^2 + y^2 - 12x + 16y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 25,\ x \geqslant 0$

25. $x^2 - y^2 + xy, \quad 3x + 4y \leqslant 12,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

ЗАДАНИЕ 14

Написать уравнение касательной плоскости к поверхности которая параллельна данной плоскости:

1. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \quad x - y + 2z = 0$

2. $z^2 + xy + xz = 1, \quad x - y + 2z = 1$

3. $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0, \quad x + 2y = 0$

4. $z = 4x - xy + y^2, \quad 4x + y + 2z + 9 = 0$

На поверхности найти все точки, в которых касательная плоскость параллельна одной из координатных плоскостей:

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$
6. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$
7. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$

Написать уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0.

8. $x = e^u + u\sin v,\ y = e^u - u\cos v,\ z = uv,$
   $M_0 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), x(u_0, v_0)),\ u_0 = 1, v_0 = \pi$
9. $x = u\cos x,\ y = u\sin v,\ z = v,\ M_0 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), x(u_0, v_0)),$
   $u_0 = 1,\ v_0 = \dfrac{\pi}{4}$
10. $x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3,$
    $M_0 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), x(u_0, v_0)),\ u_0 = 1,\ v_0 = 2$
11. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0, \quad M_0 = (1, -1, -1)$
12. $xy + yz + zx = x^3 + y^3 + z^3, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
13. $x^3 + y^3 - 3xz = 3, \quad M_0 = (1, 4, 2)$
14. $x^8 + y^1 3 + 5z^3 = 7, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
15. $x^3 + y^3 + z^3 + xy + xz + yz = 1, \quad M_0 = (1, 0, 0)$
16. $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
17. $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, \quad M_0 = (2, 3, 6)$
18. $(z^2 - x^2)xyz = 5 + y^5, \quad M_0 = (1, 1, 2)$
19. $z^2 = \pi \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad M_0 = (1, 1, \dfrac{\pi}{2})$
20. $3x^6 - 4y^3z + 4z^2x^3y - 4z^3x + 1 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
21. $x^4 - y^3z + 2z^2xy - z^3x - 1 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
22. $x^4 + 4y^3z + 4z^2xy - 8z^3x - 1 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
23. $13x^4 - 4y^3z - 6z^2xy - 4z^3x + 1 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$
24. $7x^5 - 5y^3z + 4z^2xy - 4z^3x - 2 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$

25. $3x^4 - 4y^3z^3 + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0, \quad M_0 = (1, 1, 1)$

ЗАДАНИЕ 15

Для заданного множества G записать интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования:

G — треугольник, ограниченный прямыми:

1. $x = 0,\ y = 0,\ ax + by = c$
2. $x = 0,\ y = a,\ kx - ly = b$
3. $y = 0,\ y = kx,\ x = a$
4. $x = 2a,\ y = 2a,\ x + y = a$
5. $x = a,\ y = kx,\ y = -lx,\ a > 0,\ k > 0, l > 0$
6. $x = a,\ y = kx,\ y = lx,\ a > 0,\ k > l$
7. $y = b,\ ay = bx,\ ay = 4ab - hx,\ a > 0,\ h > 0$
8. $y = 2kx,\ y = -kx,\ 2kx + y = 2a,\ k > 0$
9. $y = lx,\ y = kx,\ x + y = (l + 1)(k + 1),\ l > k$

G — четырехугольник, ограниченный прямыми $(a > 0)$:

10. $x = 0,\ y = 0,\ y = a,\ x + y = 2a$
11. $x = 0,\ y = a,\ y = x,\ x + y = 2a$
12. $y = 0,\ y = a,\ x + y = 0,\ x + y = 2a$
13. $2y = x,\ 2y = x + 6,\ y = 2x,\ y = 2x - 3$
14. $x = 0,\ y = 0,\ x - y = a,\ x + y = 2a$
15. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2a,\ 2x + 3y = 5a$
16. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2a,\ 2x + 5y = 7a$
17. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2a,\ 2x + 7y = 9a$
18. $x + y = a,\ x + y = 2a,\ 2x + 3y = 6a,\ 2x + 3y = 12a$
19. $x + 2y = 2a,\ x + 2y = 4a,\ 2x + y = 2a,\ 2x + y = 4a$
20. $x + 3y = a,\ x + 3y = 3a,\ 3x + y = a,\ 3x + y = 3a$
21. $2x - 3y = 2a,\ 2x - 3y = 5a,\ 3x - 2y = 2a,\ 3x - 2y = 5a$

22. $3x - 5y = 15a,\ 3x - 5y = 5a,\ 5x - 3y = 5a,\ 5x - 3y = 15a$

23. $x - y = a,\ x - y = 3a,\ 2x + y = a,\ 2x + y = 3a$

24. $x - 2y = 2a,\ x - 2y = 6a,\ 2x + y = 3a,\ 2x + y = 6a$

ЗАДАНИЕ 16

Для заданного множества G записать интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования:

G — ограничено кривыми:

1. $y = x^2,\ y = x + 2$
2. $x = \sqrt{4 - y^2},\ x = \sqrt{4y - 4y^2},\ y = 2$
3. $2x = \sin \pi y,\ y = (1 + x)^2,\ y = 0$
4. $x = \cos \pi y,\ y^2 - 0,25 - x = 0$
5. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1,\ y = 0$

G задается неравенствами:

6. $y \geqslant x^2,\ y \leqslant 0,5x^2 + 0,5$
7. $x^2 + y^2 \geqslant 2x + 2y - 1,\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$
8. $y \geqslant x^2,\ y \leqslant 0,5x^2 + 0,5,\ y \geqslant -x^2 + 0,5,\ x \geqslant 0$
9. $x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ (x - a)^2 + (y - a)^2 \leqslant a^2$
10. $x^2 + y^2 \geqslant 1,\ (x - 2)^2 + y^2 \geqslant 1,\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 1$
11. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geqslant 1,\ x + y \leqslant 1,\ y \geqslant 0$
12. $-x \leqslant 2y \leqslant x,\ x^2 - y^2 \leqslant 1$
13. $y^2 \leqslant 2x - 4,\ y^2 \geqslant 4x + 4$
14. $x^2 + y^2 \geqslant a^2,\ y^2 \leqslant a^2 - 0,5ax$
15. $x^2 + 2y^2 \leqslant 8a^2,\ x^2 - y^2 \geqslant 2a^2,\ (2a, 0) \in G$
16. $x^2 + 2y^2 \leqslant 16a^2,\ x^2 - y^2 \leqslant a^2$
17. $x - y - 1 \leqslant 0,\ x + y - 1 \leqslant 0,\ y^2\ lqs 2x + 1$
18. $x \geqslant |y|,\ y^2 \geqslant 4(x - 1),\ (0,5, 0) \in G$
19. $x^2 - y^2 \leqslant a^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 3a^2$

20. $x^2 + y^2 \geqslant a^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 2ax,\ y \geqslant 0$

21. $y^2 \leqslant 2ax + 2a^2,\ y \geqslant x$

22. $x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x + y \geqslant a,$

23. $x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x + y \geqslant a$

24. $x^2 + y^2 \leqslant 4x,\ y \geqslant x$

ЗАДАНИЕ 17

Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy (a > 0),$

2. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x,y)dx$

3. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2x}^{(7x+10)/6} f(x,y)dy,$

4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)dy$

5. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)dy,$

6. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx$

7. $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{\frac{2}{3}(x-1)}^{\log_2 x} f(x,y)dy,$

8. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)dy$

9. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\ln x}^{3x} f(x,y)dy,$

10. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-1}^{3+2x-x^2} f(x,y)dy$

11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{\sqrt{12-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx,$

12. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)dy$

13. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{(x-1)^2} f(x,y)dy,$

14. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$

15. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)dy,$

16. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

17. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt{9-y^2}}^{3-2y} f(x,y)dx,$

18. $\int\limits_{a/2}^a dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

19. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy,$

20. $\int\limits_{-7}^1 dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)dx$

21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1+\sqrt{y}}^{\cos(0{,}5\pi y)} f(x,y)dx,$

22. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx$

23. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y)dy,$

24. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx$

ЗАДАНИЕ 18

Вычислить двойные интегралы:

1. $\iint\limits_G x^3y^5dxdy, \quad G = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$
2. $\iint\limits_G \operatorname{sign}(x^2+y^2-4)dxdy, \quad G = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 9\}$
3. $\iint\limits_G \sqrt{|x-y|}dxdy, \quad G = \{(x,y) : |y| \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$
4. $\iint\limits_G [x^2+y^2]dxdy, \quad G = \{(x,y) : x+y \leqslant 3,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

5. $\iint\limits_G [x^2 - y^2] dxdy, \quad G = \{(x, y) : 2x + y \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

6. $\iint\limits_G [x + y^2] dxdy, \quad G = \{(x, y) : x + y \leqslant 3,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

7. $\iint\limits_G [x^2 + y] dxdy, \quad G = \{(x, y) : x + 4y \leqslant 8,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

8. $\iint\limits_G \min\{x, y\} dxdy, \quad G = \{(x, y) : x + y \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

9. $\iint\limits_G \max\{2x, y\} dxdy, \quad G = \{(x, y) : 2x + y \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

10. $\iint\limits_G \min\{x^2, y\} dxdy, \quad G = \{(x, y) : x + y \leqslant 6,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

11. $\iint\limits_G \max\{x^2, y\} dxdy, \quad G = \{(x, y) : x + y \leqslant 12,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

12. $\iint\limits_G \min\{x, y\} dxdy, \quad G = \{(x, y) : 3x + 2y \leqslant 6,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

13. $\iint\limits_G \operatorname{sign}\{2a - 2x - y\} dxdy, \quad G = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ a > 0\}$

14. $\iint\limits_G |xy| dxdy, \quad G = \{(x, y) : 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

15. $\iint\limits_G (2 - x - y) dxdy, \quad G = \{(x, y) : 2y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

16. $\iint\limits_G |y| dxdy, \quad G = \{(x, y) :\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} \leqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

17. $\iint\limits_G (x^2 + y^2) dxdy, \quad G = \{(x, y) :\ 2 \leqslant |x| \leqslant 4,\ 3 \leqslant |y| \leqslant 4\}$

18. $\iint\limits_G x^2 y^2 dxdy, \quad G = \{(x, y) :\ y \geqslant 0,\ xy \leqslant 1,\ x^2 - 3xy + 2y^2 \leqslant 0\}$

19. $\iint\limits_G (2y - x) dxdy, \quad G = \{(x, y) :\ y(y - x) \leqslant 2,\ x(x + y) \leqslant 3\}$

20. $\iint\limits_G x dxdy, \quad G = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 2,\ x^2 - y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$

21. $\iint\limits_G \sqrt{|y - x^2|} dxdy, \quad G = \{(x, y) :\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

22. $\iint\limits_G \max\{\sin x, \sin y\} dxdy, \quad G = [0, \pi] \times [0, \pi]$

23. $\iint\limits_G xydxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 25,\ 3x+y\geqslant 5\}$

24. $\iint\limits_G ydxdy, \quad G=\{(x,y):\ 0\leqslant y\leqslant 6,\ x\leqslant 6,\ xy\geqslant 3,\ y-x-2\leqslant 0\}$

ЗАДАНИЕ 19

Вычислить двойные интегралы, перейдя к полярным координатам:

1. $\iint\limits_G \cos(x^2+y^2)dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 9\}$
2. $\iint\limits_G \ln(1+x^2+y^2)dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4\}$
3. $\iint\limits_G \dfrac{x^2}{x^2+y^2}dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4x\}$
4. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 6y\}$
5. $\iint\limits_G y^2\sqrt{16-x^2}dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 16\}$
6. $\iint\limits_G \dfrac{xdxdy}{9-x^2-y^2}, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 3x\}$
7. $\iint\limits_G \dfrac{dxdy}{x^2+y^2-1}, \quad G=\{(x,y):\ 9\leqslant x^2+y^2\leqslant 25\}$
8. $\iint\limits_G |xy|dxdy, \quad G=\{(x,y):\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$
9. $\iint\limits_G y^2e^{x^2+y^2}, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\}$
10. $\iint\limits_G \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad G=\{(x,y):\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0\}$
11. $\iint\limits_G (2x+3y)dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4,\ x-y\geqslant 0\}$
12. $\iint\limits_G (x+y)dxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 9, y-3x\geqslant 0\}$
13. $\iint\limits_G \mathrm{sign} ydxdy, \quad G=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4,\ y-x\geqslant 0\}$

14. $\iint\limits_G xydxdy, \quad G = \{(x, y): \; x^2 + y^2 \leqslant 2x, \; x \geqslant y\}$

15. $\iint\limits_G \dfrac{y}{x^2 + y^2} dxdy, \quad G = \{(x, y): \; x^2 + y^2 \leqslant 1, \; x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$

16. $\iint\limits_G \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 dxdy, \quad G = \{(x, y): \; 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$

17. $\iint\limits_G xdxdy, \quad G = \{(x, y): \; 2x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4x, \; y \geqslant 0\}$

18. $\iint\limits_G y^2 dxdy, \quad G = \{(x, y): \; 2x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 6x, \; y \leqslant x\}$

19. $\iint\limits_G x^2 dxdy, \quad G = \{(x, y): \; 4x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 8x, \; y \leqslant x\}$

20. $\iint\limits_G \sqrt{16 - x^2 - y^2} dxdy, \; G = \{(x, y): 4y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16, \; y \geqslant 0\}$

21. $\iint\limits_G \sqrt{25 - x^2 - y^2} dxdy, \; G = \{(x, y): 5x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25, \; x \geqslant 0\}$

22. $\iint\limits_G xydxdy, \quad G = \{(x, y): \; 6x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 12x, \; y \geqslant x\}$

23. $\iint\limits_G \dfrac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad G = \{(x, y): \; 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25\}$

24. $\iint\limits_G ydxdy, \quad G = \{(x, y): \; 0 \leqslant x \leqslant (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \leqslant 1, \; y \geqslant 0\}$

ЗАДАНИЕ 20

Вычислить двойные интегралы:

1. $\iint\limits_G xydxdy, \quad G = \{(x, y): \; |x + 2y| \leqslant 3, \; |x - y| \leqslant 3\}$

2. $\iint\limits_G (x + y)dxdy, \quad G = \{(x, y): \; 2 \leqslant xy \leqslant 8, \; 0 \leqslant x - y \leqslant 4\}$

3. $\iint\limits_G (x + y)dxdy, \quad G = \{(x, y): \; |2x + y| \leqslant 1, \; |x + y| \leqslant 2\}$

4. $\iint\limits_G (2x - y)dxdy, \quad G = \{(x, y): \; |2x + 3y| \leqslant 5, \; |x + y| \leqslant 3\}$

5. $\iint\limits_G ydxdy, \quad G = \{(x, y): \; |3x + 4y| \leqslant 7, \; |x + y| \leqslant 2\}$

6. $\iint\limits_G x dx dy, \quad G=\{(x,y):\ |2x+3y|\leqslant 3,\ |x+y|\leqslant 4\}$

7. $\iint\limits_G x dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 4\leqslant xy\leqslant 16,\ 1\leqslant \dfrac{y}{x}\leqslant 4,\ x>0\}$

8. $\iint\limits_G y dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 6\leqslant xy\leqslant 24,\ 2\leqslant \dfrac{y}{x}\leqslant 3,\ x>0\}$

9. $\iint\limits_G x dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 9\leqslant xy\leqslant 81,\ 1\leqslant \dfrac{y}{x}\leqslant 3,\ x>0\}$

10. $\iint\limits_G x dx dy, \quad G=\{(x,y):\ x^2\leqslant y\leqslant 8x^2,\ y^2\leqslant x\leqslant 8y^2\}$

11. $\iint\limits_G (x^4-y^4) dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 1\leqslant xy\leqslant 2,\ 1\leqslant x^2-y^2\leqslant 2,\ x>0\}$

12. $\iint\limits_G e^{\frac{x^4}{y^2}} dx dy, \quad G=\{(x,y):\ x\leqslant y\leqslant 2x,\ y\geqslant x^2\}$

13. $\iint\limits_G xy dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 2x\leqslant y\leqslant 3x,\ y\geqslant 6x^2\}$

14. $\iint\limits_G y dx dy, \quad G=\{(x,y):\ x\leqslant y\leqslant 4x,\ y\geqslant 8x^2\}$

15. $\iint\limits_G e^{\frac{x^4}{y^2}} dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 2x\leqslant y\leqslant 5x,\ y\geqslant 10x^2\}$

16. $\iint\limits_G (x+y) dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 2x\leqslant y\leqslant 4x,\ y\geqslant 8x^2\}$

17. $\iint\limits_G (x-y) dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 2\leqslant xy\leqslant 4,\ 1\leqslant x-y\leqslant 5\}$

18. $\iint\limits_G xy dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 1\leqslant xy\leqslant 4,\ 2\leqslant x-y\leqslant 5\}$

19. $\iint\limits_G (x-y) dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 1\leqslant xy\leqslant 3,\ 2\leqslant x-y\leqslant 4\}$

20. $\iint\limits_G (x+y) dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 4\leqslant xy\leqslant 9,\ 1\leqslant x-y\leqslant 3\}$

21. $\iint\limits_G xy dx dy, \quad G=\{(x,y):\ 4x^3\leqslant y\leqslant 9x^3,\ x\leqslant y^2\leqslant 3x\}$

22. $\iint\limits_G y dx dy, \quad G=\{(x,y):\ x^3\leqslant y\leqslant 8x^3,\ x\leqslant y^2\leqslant 2x\}$

23. $\iint\limits_G x dx dy, \quad G = \{(x,y): \ 4x^3 \leqslant y \leqslant 16x^3, \ 2x \leqslant y^2 \leqslant 4x\}$

24. $\iint\limits_G xy dx dy, \quad G = \{(x,y): \ x^3 \leqslant y \leqslant 12x^3, \ 2x \leqslant y^2 \leqslant 6x\}$

ЗАДАНИЕ 21

Используя двойной интеграл, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \ x^{2/3} + y^{2/3} = 4, \ y = x, \ y = 8x$
2. $x^2 = y, \ x^2 = 2y, \ x^3 = 2y^2, \ x^3 = 6y^2$
3. $xy = 1, \ xy = 4, \ x^2 = y, \ x^2 = 9y$
4. $x^2 + y^2 = 2x, \ x^2 + y^2 = 4y, \ y = x, \ y = 0$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}, \ x + y = 3$
6. $(x+y)^2 + x^2 = 16$
7. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1, \ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2, \ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}, \ \dfrac{x}{2} = 3y$
8. $(x + y + 2)^2 + (2x - y + 1)^2 = 1$
9. $(x+y)^4 = 16(x^2 + y^2), \ x = 0, \ y = 0, \ (x > 0, \ y > 0)$
10. $\sqrt[4]{\dfrac{x}{2}} + \sqrt[4]{\dfrac{y}{3}} = 1, \ x = 0, \ y = 0$
11. $y = x^2, \ y = \dfrac{1}{x}, \ y = \dfrac{10}{3} - x, \ x \geqslant 3$
12. $y = \sqrt{3}x^2, \ y = \sqrt{4 - x^2}$
13. $(2x + y + 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 1$
14. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \ \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{y^2}{25}$
15. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 2x + 3y$
16. $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1, \ x^2 + y^2 = 1, \ (x^2 + y^2 \geqslant 1)$
17. $y^2 = 2px + p^2, \ y^2 = q^2 - 2qx, \ (p > 0, q > 0)$
18. $x^2 + y^2 = 4, \ y^2 = 4x - x^2, \ x < 1$

19. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=3x+4y$

20. $(x+y)^2+y^2=9$

21. $y^2=2px,\ y^2=\dfrac{8}{27p}(x-p)^3$

22. $x^2+4y^2=8,\ x^2-3y^2=1$

23. $y^2=2x,\ x^2+y^2-8x+7=0$

24. $x^2+y^2=16,\ y^2=8(4+x),\ y=0$

ЗАДАНИЕ 22

Вычислить криволинейный интеграл I рода:

1. $\int\limits_L z ds,\quad L=\{(x,y,z):\ x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ z=e^{-t},\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$

2. $\int\limits_L x^2 ds,\quad L=\{(x,y,z):\ x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$

3. $\int\limits_L x^2 ds,\quad L=\{(x,y):\ x^2+y^2=4,\ y\geqslant 0\}$

4. $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 ds,\quad L=\{(x,y):\ x^2+y^2=4\}$

5. $\int\limits_L (x-y) ds,\quad L=\{(x,y):\ x^2+y^2=2x\}$

6. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}ds,\quad L=\{(x,y):\ x^2+y^2=2y\}$

7. $\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3}) ds,\quad L=\{(x,y):\ x^{2/3}+y^{2/3}=1\}$

8. $\int\limits_L \dfrac{z^2}{x^2+y^2}ds,\quad L=\{(x,y):\ x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$

9. $\int\limits_L \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2},$
   $L=\{(x,y):\ x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$

10. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2) ds,$
    $L=\{(x,y):\ x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$

11. $\int\limits_L z ds, \quad L = \{(x, y, z): \ x = t\cos t, \ y = t\sin t, \ z = t, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$

12. $\int\limits_L (\sqrt{x^2+y^2} + z) ds, \quad L = \{x = t\cos t, \ y = t\sin t, \ z = t, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$

13. $\int\limits_L (2x - z^2 y) ds,$

$$L = \{(x, y, z): \ x = \frac{t^2}{2}, \ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}, \ z = t, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

ЗАДАНИЕ 23

Вычислить криволинейный интеграл 2 рода.

1. $\int\limits_l (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = |x|\},$

2. $\int\limits_l (x^3 - 3x^2 y)dx + (3xy^2 - y^3)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-1, 2], y = |x-1|\},$

3. $\int\limits_l (x^2 - 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = 1 - |x-1|\},$

4. $\int\limits_l (x - y^2)dx + (x^2 - y)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = |x+1| - 1\},$

5. $\int\limits_l (x + 2xy)dx + (x^2 - 2xy)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = |x-1| - 1\},$

6. $\int\limits_l (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 - 3y^2)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [0, 4], y = |x-2|\},$

7. $\int\limits_l (x^2 - y^2)dx + (x^2 - xy)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [0, -4], y = |x+2|\},$

8. $\int\limits_l (x+y)dx + (x-y)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = |1 - |x||\},$

9. $\int\limits_l (x+2y)dx + (2x-y)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = |1 - |x-1||\},$

10. $\int\limits_l 3xydx + (2x - y^2)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = 2 - 4|x|\},$

11. $\int\limits_l 3xy^2dx + (x^2 + y^2)dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = 4|x| - 2\},$

12. $\int\limits_l (x+y)dx + x^2dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = |1 - 2|x||\},$

13. $\int\limits_l (x-y)dx - y^2dy, \ l = \{(x, y): \ x \in [-2, 2], y = ||x| - 1|\},$

14. $\int\limits_l (x+3y)dx+(x-4y)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,2], y=||x-1|-2|\},$

15. $\int\limits_l (x+4y)dx+(4x-3y)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,2], y=|x^2-1|\},$

16. $\int\limits_l (x+y)dx+(x^2-3y)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[0,3], y=|x^2-4|\},$

17. $\int\limits_l 2xydx-y^2dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,2], y=|x-|x||\},$

18. $\int\limits_l (x^2-y^2)dx-xydy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,2], y=|x-2|x||\},$

19. $\int\limits_l (x^2-y)dx+(x-y^2)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,2], y=x^3\},$

20. $\int\limits_l (x-y^2)dx+(2x^2-y^2)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[0,4], y=||x-2|-1|\},$

21. $\int\limits_l xydx+(2x^2-y)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[0,6], y=||x-2|-1|\},$

22. $\int\limits_l xy^2dx-(x^2-y^2)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,4], y=|x^2-1|\},$

23. $\int\limits_l (x^3-y^2)dx+(x^2-xy^2)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,3], y=1-|x|\},$

24. $\int\limits_l (x^2-y)dx+(x-y^2)dy,\ l=\{(x,y):\ x\in[-2,4], y=|x^3-1|\},$

ЗАДАНИЕ 24

Восстановить функцию $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

1. $du=\dfrac{y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy,$ 2. $du=yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$

3. $du=\dfrac{y}{1=xy}dx+\dfrac{x}{1+xy}dy,$ 4. $du=\dfrac{y}{1+x^2y^2}dx+\dfrac{x}{1+x^2y^2}dy$

5. $du=2xydx+x^2ydy,$ 6. $du=y^2e^{xy^2}dx+2xye^{xy^2}dy$

7. $du=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}dx-\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}dy$ 8. $du=\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$

9. $du = (3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy)dy,$ 10. $du = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy$

11. $du = (\cos x + 3x^2y)dx + (x^3 - y^2)dy,$ 12. $du = \dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$

13. $du = \dfrac{\cos x}{y}dx - \dfrac{\sin x}{y^2}dy,$ 14. $du = y^2\sin x dx - 2y\cos x dy$

15. $du = (5x^4y^2 + e^x)dx + 2x^5ydy,$ 16. $du = 3x^2y^4dx + (4x^3y^3 + \dfrac{1}{y})dy$

17. $du = 3x^2y^5dx + (5x^3y^5 + \ln y)dy$ 18. $du = 4x^3y^5dx + (5x^4y^5 - e^y)dy$

19. $du = 3x^2y^4dx + (4x^3y^3 - \dfrac{1}{y})dy,$ 20. $du = 2x^2y^3dx + (2x^3y^2 - y^4)dy$

21. $du = (x + \ln y)dx + (\dfrac{x}{y} + \sin y)dy,$ 22. $du = (x - e^y)dx + (y^7 - xe^y)dy$

23. $du = (\cos x - 5x^2y^3)dx - 5x^3y^3dy,$ 24. $du = (\ln x + 2xy)dx + x^2dy$

ЗАДАНИЕ 25

Дополнительные задачи к коллоквиуму и экзамену

1. Найти наименьшее значение функции $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - 4x - 4y.$

2. Доказать, что любая положительная функция $u(x,y)$, удовлетворяющая уравнению $u \cdot u''_{xy} - u'_x u'_y = 0$ имеет вид $u(x,y) = \varphi(x)\cdot\psi(y).$

3. Какому необходимому и достаточному условию в односвязной области G должна удовлетворять функция $F \in C^1(G)$, чтобы

$$\int\limits_l F(x,y)(ydx + xdy) = 0$$

для любого замкнутого контура l.

4. Вычислить $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \min(x,y,z)dxdydz.$

5. Найти массу четверти круга $x^2 + y^2 \leqslant 4, (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$, если плотность в точке (x,y) равна наибольшему целому числу, не превосходящему $x+y$.

6. Найти такое векторное поле $\overline{A}$, что $div\overline{A} = 2x - y$, $rot\overline{A} = -zi$.

7. Кривая заданная параметрически

$$\begin{cases} x = t^2 + 4t, \\ y = t^2 - 4t \end{cases}$$

вращается вокруг оси OY. Найти поток векторного поля $y\bar{i}$ через ту часть получившейся поверхности, которая находится внутри цилиндра $x^2 + z^2 \leqslant 4x$.

8. Вычислить $\int\limits_l \frac{y}{4x^2+y^2}dx - \frac{x}{4x^2+y^2}dy$, где l — произвольный замкнутый контур, не проходящий через начало координат.

9. Изменить местами порядок интегрирования $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{0} f(x,y)dy$.

10. Пусть $f \in C[0,1]$. Доказать равенство

$$\Big(\int\limits_0^1 f(x)dx\Big)^2 = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x)f(y)dy.$$