Контрольная работа № 2

I. Схема Горнера

Задание 1. Переразложите многочлен $f(x)$ по степеням $x-a$.
а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 11x - 1, \quad a = -1.$
б) $f(x) = -3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - x + 2, \quad a = -2.$

Задание 2. Определите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$.
а) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 8x + 3, \quad x_0 = -1.$
б) $f(x) = 3x^5 - 12x^4 + 14x^3 - 7x^2 + 4x + 4, \quad x_0 = 2.$

II. Алгоритм Евклида

Задание 3. Представьте $d(x) = \text{НОД}\,(f(x), g(x))$ в виде $f(x)u(x) + g(x)v(x)$.
а) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 5.$
б) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1, \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2.$

III. Теорема о факторизации и производная многочлена

Задание 4. Найдите $d(x) = \text{НОД}\,(f(x), g(x))$ и $m(x) = \text{НОК}\,(f(x), g(x))$.
а) $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1), \quad g(x) = (x^3 - 1)(x^2 - 1)(x + 1).$
б) $f(x) = (x^4 - 1)(x^3 + 8)(x - 1), \quad g(x) = (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 1)(x - 1).$

Задание 5. Разложите многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.
а) $f(x) = x^3 + 27.$
б) $f(x) = x^8 + 4.$

Задание 6. Используя процедуру выделения кратных множителей, найдите разложение многочлена $f(x)$ на линейные множители.
а) $f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8.$
б) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2.$

IV. Рациональные корни и неприводимость над $\mathbb{Q}$

Задание 7. Найдите рациональные корни многочлена $f(x)$.
а) $f(x) = 4x^5 + 8x^4 - 59x^3 + 67x^2 - 28x + 4.$
б) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12.$

Задание 8. Пользуясь критерием Эйзенштейна, докажите неприводимость многочлена $f(x)$ над $\mathbb{Q}$.
а) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x + 1.$
б) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1.$

V. Евклидовы пространства

Задание 9. С помощью процесса ортогонализации постройте ортогональный базис подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.
а) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$.
б) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (5, 8, -2, -3)$, $a_3 = (3, 9, 3, 8)$.

Задание 10. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. Вычислите угол между x и L.

а) $x = (4, -1, -3, 4)$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

б) $x = (5, 2, -2, 2)$, $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$.

Задание 11. Вычислите двумя способами объём параллелепипеда $\Pi(a_1, a_2, a_3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

а) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (-1, 0, 2)$, $a_3 = (2, -3, 1)$.

б) $a_1 = (3, 1, 0)$, $a_2 = (-1, -2, 2)$, $a_3 = (1, -1, -1)$.

VI. Линейные операторы

Задание 12. а) Линейное преобразование φ вещественного 3-мерного векторного пространства задано в базисе a_1, a_2, a_3 матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\mathrm{Im}\,(\varphi)$, $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ и матрицу A'_φ преобразования φ в базисе

$$a'_1 = 2a_1 + 3a_2 + a_3, \quad a'_2 = 3a_1 + 4a_2 + a_3, \quad a'_3 = a_1 + 2a_2 + 2a_3.$$

б) Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан в базисе

$$a_1 = (1, 0, 0), \quad a_2 = (-1, 1, 0), \quad a_3 = (2, -1, -1)$$

матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\mathrm{Im}\,(\varphi)$, $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ и матрицу A'_φ оператора φ в базисе

$$a'_1 = (-1, -1, 1), \quad a'_2 = (0, -1, 2), \quad a'_3 = (0, 0, 1).$$

Задание 13. Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей A_φ в стандартном базисе. Выясните, является ли этот оператор диагонализируемым. Найдите базис, в котором матрица оператора φ диагональна, а также укажите эту диагональную матрицу.

$$\text{а) } A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{б) } A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 14. Линейное преобразование φ евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ имеет в базисе

$$a_1 = (0, -1), \quad a_2 = (1, 2)$$

матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выясните, является ли это преобразование самосопряжённым. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ диагональна, а также укажите эту диагональную матрицу.

VII. Квадратичные формы

Задание 15. Приведите квадратичную форму $q(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду методом Лагранжа.

а) $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

б) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Задание 16. При каких $a \in \mathbb{R}$ квадратичная форма $q(x_1, x_2, x_3)$ будет положительно определённой?

а) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

б) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Задание 17. Приведите квадратичную форму $q(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду ортогональным преобразованием (приведение к главным осям).

а) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

б) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

VIII. Векторные пространства

Задание 18. а) Подпространства L_1 и L_2 пространства $\mathbb{R}^5$ заданы однородными системами уравнений:

$$L_1 = \{x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\},$$
$$L_2 = \{-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0\}.$$

Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ этих подпространств.

б) Подпространство L_1 пространства $\mathbb{R}^5$ задано однородной системой уравнений:

$$L_1 = \{-3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Подпространство L_2 пространства $\mathbb{R}^5$ порождено векторами

$$b_1 = (0, 5, 5, 5, 0), \quad b_2 = (1, 0, -1, 2, 1), \quad b_3 = (-3, 0, 0, 5, 1).$$

Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ этих подпространств.

Задание 19. а) Подпространство L_1 пространства $\mathbb{R}^4$ порождено векторами

$$a_1 = (1, 2, 1, -2), \quad a_2 = (2, 3, 1, 0), \quad a_3 = (1, 2, 2, -3),$$

а подпространство L_2 — векторами

$$b_1 = (1, 1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 0, 1, -1), \quad b_3 = (1, 3, 0, -4).$$

Найдите базис пересечения $L_1 \cap L_2$ этих подпространств.

б) Подпространство L_1 пространства $\mathbb{R}^4$ порождено векторами

$$a_1 = (1, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 1, 0), \quad a_3 = (0, 0, 1, 1),$$

а подпространство L_2 — векторами

$$b_1 = (1, 0, 1, 0), \quad b_2 = (0, 2, 1, 1), \quad b_3 = (1, 2, 1, 2).$$

Найдите базис пересечения $L_1 \cap L_2$ этих подпространств.