**I. Классическая теория вероятностей**

Основным объектом классической теории вероятности является так называемое *случайное событие*, то есть событие, которое может произойти или не произойти в результате проведенного опыта. Числовая величина, характеризующая степень возможности данного события, называется его *вероятностью*.

**1. Классическое определение вероятности**

Если можно пересчитать все возможные исходы проводимого опыта и если ни один из этих исходов не имеет приоритета по сравнению с другими (то есть при большом количестве опытов все исходы наблюдаются с одинаковой частотой), то говорят, что мы имеем дело со *схемой случаев*. Будем считать, что  — число возможных исходов данного опыта, а  — число его исходов, при которых происходит некоторое событие  (назовем такие исходы *благоприятными* или *благоприятствующими событию*  Тогда вероятность события  определяется как отношение числа благоприятных исходов к числу возможных: .

**Пример 1.** Из колоды в 32 карты вынуто последовательно без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что обе они — тузы.

**Решение.** Так как первую карту можно извлечь из колоды 32 способами, а вторую — 31 (поскольку в колоде осталась 31 карта), то число возможных исходов опыта . Определим число благоприятных исходов. Первый туз можно выбрать из четырех, имеющихся в колоде, второй — из трех оставшихся. Значит, число благоприятных исходов  и искомая вероятность равна



Во многих случаях, однако, непосредственный перебор всех возможных исходов опыта затруднителен в силу их большого количества. Для решения таких задач полезно использовать некоторые комбинаторные формулы, в частности, формулу для *числа сочетаний*. Число сочетаний из  по *,* то есть число различных неупорядоченных наборов из  элементов, выбранных из  имеющихся различных объектов, равно



В частности, если имеется группа из  объектов двух видов ( элементов первого вида и — второго), из которых требуется выбрать  элементов, среди которых должно быть  предметов первого типа и  второго, вероятность того, что случайно извлеченная подгруппа имеет нужный состав, определяется так:



Знаменатель этой дроби представляет собой число возможных исходов опыта, то есть количество различных наборов по  элементов, выбранных из  имеющихся без учета их качественного состава. В числителе — число благоприятных исходов, представляющее собой число возможных наборов из  элементов нужного вида, умноженное на количество возможных наборов из предметов второго типа.

**Пример 2.** Из коробки, в которой лежат пять пирожных «эклер» и семь — «наполеон», достали пять пирожных. Найти вероятность того, что среди них два «эклера» и три «наполеона».

**Решение.** Количество возможных исходов опыта представляет собой число сочетаний из 12 по 5:



Число благоприятных исходов является произведением количества способов, которыми можно выбрать два «эклера» из пяти имеющихся, и числа наборов по три «наполеона» из семи:



Следовательно, искомая вероятность равна 

**2. Геометрические вероятности**

Если множество возможных исходов опыта можно представить в виде отрезка прямой или в виде некоторой плоской или трехмерной области, а множество исходов, благоприятных событию  — как часть этой области, то вероятность рассматриваемого события определяется следующим образом:



где  — длина отрезка (площадь или объем области), задающего множество возможных исходов, а  — соответствующая мера множества благоприятных исходов.

**Пример 3.** В круг наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что она не попадет в правильный треугольник, вписанный в этот круг.

**Решение.** В этом случае мерой множества возможных исходов является площадь круга:  а мерой множества благоприятных исходов — разность площадей круга и треугольника: . Следовательно, вероятность заданного события равна



**3. Теоремы сложения и умножения вероятностей**

Напомним, что *суммой* событий  и  называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из событий  и , а *произведением* этих событий — событие, состоящее в том, что произошли оба данных события.

Вероятность суммы двух событий можно найти по *теореме сложения вероятностей*:



Если событияи *несовместны*, то есть не могут произойти одновременно, то вероятность их произведения равна нулю, и теорема сложения приобретает более простой вид:



Вероятность произведения событий определяется по *теореме умножения вероятностей*:



где  — так называемая *условная вероятность* события , то есть вероятность  при условии, что  произошло. Если осуществление события  не изменяет вероятности события , то  и  называются *независимыми*, и вероятность их произведения равна произведению вероятностей сомножителей:



Заметим, что при решении задач теоремы сложения и умножения обычно используются совместно.

**Пример 4.** Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания равны соответственно 0,6 и 0,9. Найти вероятности следующих событий:

 — оба попали в цель;

 — в цель попал хотя бы один.

**Решение.** Назовем событиями  и  попадание в мишень соответственно первого и второго стрелка и отметим, что  и  являются событиями совместными, но независимыми (иными словами, в мишень могут попасть оба стрелка, а вероятность попадания каждого не зависит от результата другого). Событие  представляет собой произведение событий  и  поэтому



Событие  является суммой  и  для определения его вероятности воспользуемся общим видом теоремы сложения:



**4. Формула полной вероятности и формула Байеса**

Если событие  может произойти одновременно с одним из событий , представляющих собой так называемую *полную группу попарно несовместных событий*  (то есть в результате опыта обязательно произойдет одно и только одно событие из этой группы), то события  называются *гипотезами*, а вероятность события  определяется по *формуле полной вероятности*:



Здесь  — вероятность *-*ой гипотезы, а  — условная вероятность события  при осуществлении данной гипотезы.

**Пример 5.** В трех одинаковых урнах лежат шары: в первой — 5 белых и 3 черных, во второй — 2 белых и 6 черных, в третьей — 3 белых и 1 черный. Из случайно выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

**Решение.** Будем считать гипотезами выбор одной из урн. Поскольку урны одинаковы, каждую из них можно выбрать с одинаковой вероятностью, а так как сумма вероятностей гипотез равна 1, то вероятность каждой гипотезы —

 

Условная вероятность события , то есть извлечения белого шара из урны, определяется по классическому определению вероятности (количеством благоприятных исходов при этом является число белых шаров, а числом возможных исходов — общее число шаров в урне). Поэтому



Используя формулу полной вероятности, получаем:



Если известно, что в результате опыта событие  произошло, то эта информация может изменить вероятности гипотез: повышаются вероятности тех гипотез, при которых событие  происходит с большей вероятностью, и уменьшаются вероятности остальных. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется так называемая *теорема гипотез*, или *формула Байеса*:



(В знаменателе дроби в правой части равенства стоит полная вероятность события ).

**Пример 6.** В студенческой группе 20 студентов. Из них 5 отличников, которые знают все экзаменационные вопросы, 8 студентов знают ответы на 70 % вопросов и 7 — на 50 %. Первый вызванный студент ответил на первый вопрос экзаменационного билета. Найти вероятность того, что он отличник.

**Решение.** Будем считать гипотезой  то, что данный студент является отличником,  — что он принадлежит ко второй группе,  — к третьей. Тогда вероятности гипотез равны:



Найдем условную вероятность события  — правильного ответа на первый вопрос — при осуществлении каждой гипотезы:

  

Следовательно, полная вероятность события  равна



Применяя формулу Байеса, находим:



**5. Формула Бернулли**

Рассмотрим случай, когда требуется определить не вероятность осуществления некоторого события  в одном испытании, а вероятность того, что это событие произойдет заданное количество раз в серии из  опытов. Будем считать при этом, что вероятность  в каждом опыте одинакова и результат каждого опыта не зависит от результатов остальных. Такая постановка задачи называется *схемой независимых испытаний*. При выполнении указанных условий вероятность того, что при проведении  независимых испытаний событие  будет наблюдаться ровно раз (неважно, в каких именно опытах), определяется по *формуле Бернулли*:



где — вероятность появления  в каждом испытании, а  — вероятность того, что в данном опыте событие  не произошло.

**Пример 7.** Победу в волейбольном матче одерживает команда, выигравшая 3 партии. Найти вероятность того, что матч между командами, для которых вероятность выигрыша каждой партии равна соответственно 0,8 и 0,2, будет состоять из 5 партий.

**Решение.** Для того, чтобы потребовалось играть пятую партию, нужно, чтобы после четырех партий счет в матче был . Следовательно, каждая из команд должна выиграть любые две партии из четырех. Если  есть вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, а  — вероятность ее проигрыша, то, применяя формулу Бернулли, найдем, что



**II. Случайные величины**

Во многих задачах теории вероятности удобнее оперировать не понятием случайного события, для которого существуют только две возможности: оно может произойти или не произойти в результате опыта, а понятием так называемой *случайной величины*, то есть величины, которая при проведенном испытании может принимать различные значения, причем заранее не известно, какие именно. Если возможный диапазон значений такой величины представляет собой конечное или счетное множество, она называется *дискретной случайной величиной*, а если эти значения заполняют целиком некоторый интервал — *непрерывной случайной величиной.*

**1. Дискретные случайные величины**

Поведение дискретной случайной величины описывается *законом распределения* (или *рядом распределения*) — таблицей, в первой строке которой перечислены все возможные значения случайной величины, а во второй — вероятности, с которыми она принимает эти значения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Сумма вероятностей должна при этом равняться числу 1.

**Пример 8.** Из партии, содержащей 10 деталей, среди которых две бракованных, взяты наудачу три детали. Составить ряд распределения случайной величины  — числа стандартных деталей среди отобранных.

**Решение.** Так как бракованных деталей в партии только две, среди трех отобранных должна быть, по крайней мере, одна стандартная деталь. Следовательно, случайная величина  может принимать три значения:    Найдем соответствующие им вероятности. Число возможных наборов по три детали из 10 имеющихся, то есть число возможных исходов опыта, составляет 

Найдем число исходов, благоприятствующих каждому значению случайной величины: 

Тогда  Поэтому ряд распределения имеет вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Однако в ряде задач не требуется полностью знать поведение случайной величины, для решения достаточно лишь нескольких характеристик. Одной из основных числовых характеристик является *математическое ожидание* (или *взвешенное среднее значение*), представляющее собой среднее значение рассматриваемой случайной величины с учетом вероятностей принимаемых значений и вычисляемое по формуле:



Кроме того, зная математическое ожидание случайной величины, полезно знать и диапазон ее возможного отклонения от этого значения. Другими словами, если значения случайной величины в основном ненамного отклоняются от среднего, то оно хорошо характеризует исследуемую величину; в противном случае знание математического ожидания мало что дает для описания ее поведения. Характеристикой, показывающей масштаб отклонения случайной величины от математического ожидания, является *дисперсия* — математическое ожидание квадрата отклонения от среднего: 

При практических расчетах удобнее пользоваться другой формулой для расчета дисперсии: 

Отклонение случайной величины от математического ожидания задается *средним квадратическим отклонением*  

**Пример 9.** Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  из примера 8.

**Решение.** Используя найденный ряд распределения, получим:





**2. Непрерывные случайные величины**

Для непрерывной случайной величины теряет смысл понятие вероятности каждого конкретного значения, поскольку таких значений бесконечно много, и из условия, что сумма вероятностей всех значений равна 1, следует, что вероятность каждого фиксированного значения равна нулю. Поэтому основными характеристиками, описывающими поведение непрерывной случайной величины, являются *функция распределения* (интегральная функция распределения) и *плотность распределения* вероятностей (плотность вероятности, дифференциальная функция распределения).

Функция распределения представляет собой вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее аргумента этой функции:



Плотность вероятности (плотность распределения) *f* (*x*)является первой производной от функции распределения: . График функции  называют *кривой распределения*.

Понятие вероятности сохраняется для непрерывной случайной величины как вероятность ее попадания в некоторый интервал, которую можно определить так:  или 

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются следующим образом:



**Пример 10.** Плотность вероятности случайной величины  имеет вид:



Найти:

    

**Решение.** 1) Из условия нормированности плотности вероятности следует, что  В нашем случае

 

откуда 

2) Связь между и  задается формулой 

Поэтому при  

при  

а для  

Cледовательно, 









**3. Нормальный закон распределения**

Особый интерес для практики представляет непрерывная случайная величина, имеющая так называемый *нормальный закон распределения*, плотность вероятности которой имеет вид:



где  и — параметры. Числовые характеристики случайной величины , распределенной по нормальному закону, совпадают с параметрами распределения:   а вероятность попадания  в интервал  подсчитывается по формуле:  где  — функция Лапласа, значения которой можно найти в таблицах.

**Пример 11.** Найти вероятность попадания в интервал  для нормально распределенной случайной величины с параметрами  

**Решение.** 



Известно («правило трех сигм»), что практически все возможные значения нормально распределенной случайной величины сосредоточены в интервале . Действительно, вероятность попадания в этот интервал равна 0,9973, то есть выход за его границы можно считать событием практически невозможным ().

**Пример 12.** Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины, принимающей значения от 3,5 до 10,1.

**Решение.** Будем считать границы интервала равными  и  Тогда   и следовательно,   

**Задачи, которые надо решить**

4) Найти вероятность хотя бы одного появления события  в 10 независимых опытах, если вероятность появления  в каждом опыте равна 0,1.

5) Детали контролируются двумя контролерами. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,4, а ко второму — 0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна — 0,98, а вторым — 0,94. Годная деталь была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил второй контролер.

6) Из колоды в 36 карт выбираются наудачу 4 карты. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины  — числа тузов среди выбранных карт.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины  имеет вид:



а) Найти значение параметра . б) Построить график функции распределения . в) Найти ,  и . г) Найти вероятность того, что случайная величина  примет значения из интервала (0,2; 1,2).

8) Средняя масса шоколадных конфет, выпускаемых в коробках кондитерской фабрикой, равна 200 г, среднее квадратическое отклонение 5 г. Считая массу конфет нормально распределенной случайной величиной, найти вероятность того, что масса коробки конфет заключена в пределах (196, 207) г.