Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение:

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и определитель квадратной матрицы A, Δ, не равен нулю, то значение переменной x_i можно найти как $\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной из A путём замены i-го столбца на столбец из правой части (из чисел b_1, …, b_n). Это называется формулами Крамера.

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= 6 - 2 - 2 - 9 = -7.$$

Матрица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-5) =$$

$$= -10 + 2 + 15 = 7.$$

Таким образом

$$x_1 = \frac{7}{-7} = -1.$$

Матрица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-5) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 3 =$$
$$= 3 - 5 - 5 = -7.$$

Таким образом

$$x_2 = \frac{-7}{-7} = 1.$$

Матрица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 =$$
$$= 0 + 2 - 15 - 10 + 9 = -14.$$

Таким образом

$$x_3 = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.