Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

с использованием обратной матрицы.

Решение:

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и квадратная матрица A обратима, то, обозначая матрицу, обратную к A, через A^{-1}, решение системы можно получить путём умножения обратной матрицы на столбец из правой части, т.е.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У матрицы существует обратная тогда и только тогда, когда её определитель, Δ, не равен нулю. Если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то обратной матрицей является } \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, равно $(-1)^{i+j}\det\Delta_{ij}$. Δ_{ij} – матрица размером 2x2, получающаяся вычёркиванием из первоначальной матрицы i-ой строки и j-го столбца.

Подсчитаем определитель матрицы, Δ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= 6 - 2 - 2 - 9 = -7.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -1.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 5.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 = 2.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -3.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 11.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = -2.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 3.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = -4.$$

Таким образом обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 5 & -11 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 2/7 \\ -2/7 & 3/7 & 3/7 \\ -5/7 & 11/7 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Для получения ответа перемножим полученную обратную матрицу и столбец чисел из правой части. Умножение матрицы на вектор производится также, как и умножение матрицы на матрицу. Произведение двух матриц определено только если количество столбцов в первой совпадает с количеством строк во второй матрице. В этом случае элемент матрицы, являющейся их произведением, который стоит в i-ой строчке им j-том столбце получается из произведения i-ой строчки первой матрицы на j-ый столбец второй матрицы. Произведение строчки на столбец вычисляется как сумма произведений одноимённых элементов.

Произведение первой строки на первый столбец: $\left(\frac{1}{7}\right) \cdot (-5) + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot (-1) + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot 0 = -1.$
Произведение второй строки на первый столбец: $\left(\frac{-2}{7}\right) \cdot (-5) + \left(\frac{3}{7}\right) \cdot (-1) + \left(\frac{3}{7}\right) \cdot 0 = 1.$
Произведение третьей строки на первый столбец: $\left(\frac{-5}{7}\right) \cdot (-5) + \left(\frac{11}{7}\right) \cdot (-1) + \left(\frac{4}{7}\right) \cdot 0 = 2.$

$$A^{-1} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 2/7 \\ -2/7 & 3/7 & 3/7 \\ -5/7 & 11/7 & 4/7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.