Задача 1. *Найти обратную матрицу к*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

с помощью алгебраических дополнений.

Решение: У матрицы существует обратная тогда и только тогда, когда её определитель, Δ, не равен нулю. Если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то обратной матрицей является } \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, равно $(-1)^{i+j}\det\Delta_{ij}$. Δ_{ij} – матрица размером 2x2, получающаяся вычёркиванием из первоначальной матрицы i-ой строки и j-го столбца.

Подсчитаем определитель матрицы, Δ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 =$$
$$= 4 + 4 + 4 - 1 + 8 + 8 = 27.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = 6.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) = 6.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -6.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) = 6.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 3.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -6.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 6.$$

Таким образом обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: матрица обратима, обратная матрица равна

$$\begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.